



Magneto-convection dans une sphere en rotation rapide: approches experimentale et numerique de la convection dans les noyaux planetaires

Nicolas Gillet

► To cite this version:

Nicolas Gillet. Magneto-convection dans une sphere en rotation rapide: approches experimentale et numerique de la convection dans les noyaux planetaires. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2004. Français. NNT : . tel-00008095

HAL Id: tel-00008095

<https://theses.hal.science/tel-00008095>

Submitted on 17 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
LABORATOIRE DE GEOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

Thèse

présentée par

Nicolas GILLET

le 1^{er} octobre 2004

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Joseph Fourier

Spécialité: **Géophysique**

**Magnéto-convection dans une sphère en rotation rapide:
approches numérique et expérimentale
de la convection dans les noyaux planétaires**

Composition du jury:

Claude Jaupart	Institut de Physique du Globe de Paris	Président
Jean-François Pinton	Ecole Normale Supérieure de Lyon	Rapporteur
Emmanuel Plaut	Institut National Polytechnique de Lorraine	Rapporteur
Christopher Jones	University of Exeter (Grande Bretagne)	Examineur
Daniel Brito	Université Joseph Fourier (Grenoble)	Co-Directeur de thèse
Dominique Jault	Université Joseph Fourier (Grenoble)	Directeur de thèse

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier collectivement l'ensemble de l'équipe "Géodynamo". Ce qui m'a entraîné à m'investir dans ce travail, ce n'est pas uniquement un projet excitant, c'est aussi l'échange au quotidien, scientifique et humain, avec les membres de ce groupe. Je souhaite à tous les étudiants de tomber dans une équipe de ce type: vivante, exigeante et généreuse.

Merci donc à Dominique, Daniel, Philippe, Henri-Claude et Jean-Paul, ainsi que Denys et Thierry arrivés un peu plus tard, pour leur patience, leur disponibilité, et les discussions à la cafétaria, au café du matin comme au TGIF. Ils ont toujours tenu leur porte ouverte, que ce soit pour répondre à mes questions, donner un coup de main en salle de manip... Je leur souhaite bonne chance pour la suite de leurs aventures. Plus particulièrement je suis très reconnaissant à Daniel du temps qu'il a pris pour moi, et de sa constance face aux aléas qui se sont succédés durant ces trois années.

Bonne installation à Alex. Merci et bonne chance aussi à Bérangère, Céline, Nathanael et Gédéon.tex.tar.gz. Merci - dans l'ordre - à tous les dénudeurs, étammeurs, soudeurs et gaine thermo-rétracteurs qui ont passé quelques instants en face de la paillasse du labo gallium; à Julien qui a pris du temps pour me lancer sur le sujet.

Merci à Chris Jones pour son accueil à Exeter, le temps qu'il m'a consacré, et les longues discussions qui ont énormément aidé à faire avancer mon travail (multiplions les visites de chercheurs!). Je remercie aussi Emmanuel Plaut, Jean-François Pinton et Claude Jaupart pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse, et pour leur lecture attentive de mon manuscrit.

Le LGIT n'est pas seulement situé dans un cadre agréable; il paie aussi par les gens qui y travaillent. Je les remercie pour les trois années que j'ai passées parmi eux. Pour leurs coups de mains à des moments clefs, merci à Fabrice, Catherine, Sarah... Longue vie au foot-lgit, d'où il ressort parfois un côté humain qui aurait inspiré Pagnol ou Goscinnny. Ceux qui furent des 3 contre 3 hivernaux et pluvieux sont attendus à Leeds pour une rencontre internationale.

Apportant aujourd'hui les dernières corrections à ces trois années de travail, j'ai quelques pensées vers Manu et Arianne, Ludo et Sabine, pour leurs soutiens logistique, foot-ballistique et droits TV, gastronomique (ne négligeons pas ce qui va avec) et rédactionnistique (vive Genevieve.styl!); Sylvette pour avoir supporté mes chaussettes sales dans le bureau; Olivier, ses merveilles de la Salvetat et ses filtres matlab; Anne-Marie, ses merveilles de la Tarentaise et le temps qu'elle consacre aux étudiants avec Martine; Danièle et Bernard pour la vie au 3 rue de Paris; Henri et Geneviève pour leur gentillesse; Philippe et Annie; Fred et Evy pour la transition Grenoble-Leeds. Un clin d'oeil à Pierre et Martin, ainsi qu'à tous mes amis, pour les bons moments passés ou à venir.

Merci à ma guitare, désolé de t'avoir un peu délaissée sur la fin. Je souhaite, Marielle, qu'on trouve plus de temps à passer en musique...

Mon travail doit beaucoup à la curiosité. J'ai essayé de le faire honnêtement. Pour ça, ainsi que pour leur soutien, merci à Papa et Maman, mes Grands-Parents, Maud, les PYM's et toute ma famille.

Résumé

MAGNETO-CONVECTION DANS UNE SPHERE EN ROTATION RAPIDE: APPROCHES NUMERIQUE ET EXPERIMENTALE DE LA CONVECTION DANS LES NOYAUX PLANETAIRES

Nous avons tout d'abord étudié la convection développée en rotation rapide sans champ magnétique. En nous appuyant sur un code numérique Quasi-Géostrophique, nous avons dérivé des lois d'échelles mettant en valeur l'importance des non-linéarités thermique, quel que soit le nombre de Prandtl. L'écart au seuil d'instabilité et le mode de Rossby critique semblent définir la taille et l'intensité des tourbillons convectifs. Ces résultats numériques sont en bon accord avec nos observations expérimentales, en gallium et en eau, des fluctuations de température et des profils de vitesses. Cependant d'étranges comportements (d'intenses jets zonaux) sont observés en eau à grand forçage.

L'étude de la magnéto-convection développée a été menée après transformation de l'expérience et du code numérique. En accord avec de précédents résultats asymptotiques, l'étude numérique distingue les modes de Rossby modifié (champ faible) des modes magnétiques (champ fort). L'étude expérimentale, appuyée par les résultats numériques, montre une stabilisation de la convection développée et une modification de la géométrie des cellules en champ faible. Cette inhibition semble en grande partie la conséquence de l'évolution du seuil d'instabilité avec le champ imposé. L'étude numérique de la déstabilisation de la convection en présence d'un champ fort amène à une conclusion similaire. Les lois d'échelles dérivées précédemment sans champ magnétique semblent alors rester valable en présence d'un champ imposé.

Mots clés: dynamos planétaires, convection, fluides géophysiques, champ magnétique, turbulence, modèle numérique, expérience

Thèse préparée au Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Maison des Géosciences, B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex 9.

Abstract

MAGNETO-CONVECTION IN A RAPIDLY ROTATING SPHERE: NUMERICAL AND EXPERIMENTAL APPROACHES OF THE CONVECTION IN THE PLANETARY CORES

We first study the rapidly rotating developed convection in the non-magnetic case. With the help of a Quasi-Geostrophic numerical code, we have derived a scaling that enhances the role of the thermal non-linearities, whatever the value of the Prandtl number is. The distance from convection onset and the critical Rossby mode seem to define the vortices' intensity and size. These numerical results are in agreement with our experimental measurements, in water and liquid gallium, of the temperature fluctuations and the velocity profiles. Nevertheless some strange behaviours (e.g., intense zonal jets) are detected far from criticality in water.

Our magneto-convection study has been achieved after a modification of our experimental and numerical tools. In agreement with previous asymptotics results, our numerical study separates the modified Rossby modes (weak field case) from the magnetic modes (strong field case). The experimental study, with the help of computations, shows a stabilisation of the developed convection and a modification of the vortices' shape. This inhibition seems mainly to be the consequence of the threshold modification with the imposed field. The numerical study of the convection destabilisation by a strong field leads to similar conclusions. The scalings previously derived in the non-magnetic case thus remains valid with a imposed magnetic field.

keywords: planetary dynamos, convection, geophysical fluids, magnetic field, turbulence, numerical modeling, experiment

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE: LE CONTEXTE PLANETOLOGIQUE	13
Avant-propos	15
1 Les dynamos planétaires	17
1.1 La structure de la Terre	17
1.2 L'observation du champ magnétique	20
1.2.1 Survol du champ magnétique terrestre	20
1.2.2 Bestiaire des planètes	22
1.3 Quel moteur pour une dynamo planétaire?	24
1.3.1 Sources d'énergie et bilan thermique du noyau liquide	24
1.3.2 Histoire d'une planète et dynamo	25
2 Différentes approches d'un problème trop compliqué	27
2.1 Vision théorique des dynamos planétaires	27
2.2 Avantages et inconvénients des dynamos numériques	29
2.3 Le pari des dynamos expérimentales	31
2.4 Comment faire ressortir les phénomènes physiques?	32
I LA FORMULATION DU PROBLEME	35
1 Les équations générales du problème	37
1.1 Des équations de Maxwell à l'équation d'induction	37
1.1.1 Les équations de Maxwell	37
1.1.2 La loi d'Ohm	38
1.1.3 L'équation d'induction	38
1.2 L'équation de la chaleur	39
1.2.1 Qu'est-ce que la convection?	39
1.2.2 Le gradient adiabatique	40

1.2.3	L'approximation de Boussinesq	41
1.2.4	L'équation de la chaleur	41
1.3	L'équation de la quantité de mouvement	42
1.3.1	Passage dans le référentiel en rotation	42
1.3.2	Expression des forces de volume	43
2	Formulation du problème quasi-géostrophique	45
2.1	Le problème dynamique	45
2.1.1	L'équilibre géostrophique	46
2.1.2	Conservation de la masse	47
2.1.3	Equation de quantité de mouvement à l'ordre 1	48
2.1.4	L'équation de vorticité	50
2.2	Le problème thermique	52
2.2.1	Cisaillement vertical et vent thermique	52
2.2.2	L'équation de la chaleur	53
2.2.3	Flux de chaleur et nombre de Nusselt	55
2.3	Description du modèle de convection QG	56
2.3.1	Adimensionnement des équations	56
2.3.2	Expression des conditions aux limites	57
2.3.3	Implémentation numérique	61
2.4	Bilan sur la modélisation QG	63
II	CONVECTION DANS UNE SPHERE EN ROTATION RA-	
	PIDE (SANS CHAMP MAGNETIQUE)	65
	Introduction	67
1	Etude numérique du seuil de convection	69
1.1	Rappels de travaux précédents	69
1.1.1	Quelques notions de dynamique des fluides géophysiques	69
1.1.2	Etude asymptotique de l'onde de Rossby thermique	72
1.1.3	La limite des ondes "équatoriales"	73
1.2	Impact du pompage d'Ekman	75
1.2.1	Quelques estimations	75
1.2.2	Comparaison aux résultats 3D linéaires	75
1.2.3	Comparaison aux résultats analytiques linéaires	77
2	Etudes numérique et théorique de la convection non-linéaire	79

2.1	L'équilibre inertiel	82
2.1.1	Impact du pompage d'Ekman sur la convection développée	82
2.1.2	L'équilibre inertiel selon Aubert et al. [2001]	83
2.1.3	Quelques incompatibilités	85
2.2	Couches limites et tailles des tourbillons	90
2.2.1	Comment caractériser le régime dynamique?	90
2.2.2	Evolution des couches limites thermiques	91
2.2.3	Considérations à partir de la taille des structures	92
2.3	Développement non-linéaire à partir du seuil	94
2.3.1	Convection non-linéaire à grand Prandtl	95
2.3.2	Dynamique "mixte" à faible P	100
2.4	Quelques particularités du vent zonal	104
2.4.1	Origine et évolution du vent zonal	105
2.4.2	Jets multiples et taille des tourbillons	107
3	Approche expérimentale de la convection non-linéaire	111
3.1	Description de l'expérience	111
3.1.1	Les caractéristiques de l'expérience	111
3.1.2	Les mesures de vitesse par sonde Doppler	113
3.1.3	La construction des profils de vitesse	115
3.1.4	Impact du vent thermique	120
3.1.5	Les mesures de température par thermocouples	123
3.1.6	Limites de l'estimation du seuil de convection	125
3.2	Résultats expérimentaux et comparaison au code	127
3.2.1	Validation par l'expérience du code QG à faible Prandtl	129
3.2.2	Etonnants comportements convectifs en eau	135
	Conclusions sur la convection en rotation	141
III	MAGNETO-CONVECTION DANS UNE SPHERE EN RO-	
	TATION RAPIDE	143
	Introduction	145
1	Intégration de la force de Lorentz	147
1.1	Implémentation numérique de la force de Lorentz	147
1.2	Passage à la magnéto-convection expérimentale	150
1.2.1	Le champ magnétique imposé	150

1.2.2	Pourquoi un tel champ?	152
1.2.3	L'effet Joule	153
2	Le seuil d'instabilité	157
2.1	Etude asymptotique	157
2.2	Etude numérique	160
3	Convection développée en présence d'un champ imposé	163
3.1	Magnéto-convection expérimentale en champ magnétique faible	164
3.1.1	Impact du champ magnétique sur les vitesses	164
3.1.2	Impact du champ magnétique sur les perturbations de température	167
3.1.3	La traque infructueuse du champ magnétique induit	168
3.2	Magnéto-convection développée: étude numérique	169
3.2.1	Validation du code numérique en champ faible	170
3.2.2	Impact sur la dynamique	172
3.2.3	Impact sur le flux de chaleur	174
	Conclusions sur la magnéto-convection dans une sphère en rotation	177
	CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	179
1	Conclusion Générale	181
2	Perspectives	183
2.1	Diverses dynamiques dans les noyaux planétaires	183
2.1.1	Champ magnétique sur Io: magnéto-convection, dynamo ou autre? .	184
2.1.2	Quel état convectif pour le noyau?	185
2.2	Quel avenir pour les modèles QG?	187
2.2.1	Distribution du flux de chaleur à la surface du noyau	187
2.2.2	Vers l'obtention de dynamos convectives QG	187
2.3	Magnéto-convection expérimentale: perspectives	190
	ANNEXE	192
A	Méthode SOR de calcul du potentiel	
	(Successive Over-Relaxation)	195
	Bibliographie	201

INTRODUCTION GENERALE: LE CONTEXTE PLANETOLOGIQUE

Avant-propos

La question du champ magnétique des planètes peut-être abordée sous des jours très différents. Expériences de laboratoires, théorie, simulations numériques et données géophysiques apportent des éclairages divers, tous limités dans leur gamme d'application.

Les simulations numériques sont assez alléchantes, font de jolies cartes en couleur, et peuvent reproduire des comportements analogues à ceux des objets géophysiques. Elles présentent aussi l'avantage de donner accès à toutes les observables que l'on souhaite. Simplement il y a dans un modèle numérique uniquement ce qu'on y a mis. Par ailleurs la gamme de paramètre accessible numériquement n'est pas illimitée.

De ce point de vue les expériences de laboratoire sont riches, car elles apportent un questionnement quant à l'origine de phénomènes observés incompris. Les expériences les plus réussies de ce point de vue sont peut-être celles qui présentent des comportements que l'on arrive pas à faire entrer dans un modèle. Inversement elles peuvent aussi servir à calibrer ces modèles. Malgré de nouvelles techniques de mesure la qualité et la quantité des observables restent toujours limitées. Par ailleurs la reproduction expérimentale de phénomènes géophysiques présente aussi des restrictions (d'une autre nature que les limites numériques).

Mais les planètes présentent des caractéristiques tellement extrêmes par rapport à notre quotidien que l'on reste parfois bien loin de l'objet naturel étudié. De ce point de vue - contrairement aux expériences et aux modèles - la théorie a cela de bien qu'elle nous autorise parfois à idéaliser un problème, passer outre la matière et tendre vers ces caractéristiques gigantesques par la pensée. Cet outil, à en croire les articles des années 1970 sur le sujet, est affreusement efficace.

Cependant la théorie sans objet est un peu triste. Or ce qui fait l'intérêt de notre problème, c'est justement que les théories sont elles aussi dépassées par les événements. Effectivement les données géophysiques à notre disposition apportent un grand nombre de questions. La quantité d'information à notre disposition augmente d'année en année. Entre autres, depuis quelques dizaines d'années, des missions spatiales nous proposent des mesures concernant

d'autres objets que la Terre. Mais les données s'échelonnent souvent sur des périodes trop courtes, et on souffre parfois d'un manque de contrainte sur les grandeurs observées.... Les problèmes s'en trouvent alors mal posés, et au lieu de diminuer, on peut parfois avoir le sentiment que le nombre de questions augmente.

Nous allons au cours de ce chapitre introductif présenter ces différents éclairages, pour donner au lecteur un bref aperçu des questionnements actuels au sujet des dynamos planétaires.

Chapitre 1

Les dynamos planétaires

1.1 La structure de la Terre

Nous donnons ici un aperçu très général de la structure de la Terre. Pour constituer ce que l'on appelle un modèle de Terre, on a besoin de plusieurs ingrédients que l'on rappelle ici très brièvement (voir Poirier [1991] pour plus de détails):

1. Avant toute chose, notons qu'une donnée nécessaire à cette approche est la masse totale de la Terre. Celle-ci est déterminée à partir des trajectoires de satellites artificiels autour de notre planète.
2. La densité ρ et la pression p sont obtenues en utilisant une pression hydrostatique, qui vérifie

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(r)g(r) \quad (1.1)$$

avec r le rayon et g la gravité donnée par

$$g(r) = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' \quad (1.2)$$

où G est la constante universelle de gravité. Les matériaux se densifient sous l'effet de la pression, ce qui est caractérisé par le module d'incompressibilité $K = \rho \frac{dp}{d\rho}$.

Nous supposons ici que les variations latérales de densité sont négligeables, i.e. la densité ne dépend que de la profondeur. Cette hypothèse semble à première vue correcte en ce qui concerne les couches "bien mélangée" (isentropes) de la Terre, comme le manteau inférieur et le noyau liquide. Le paramètre K , accessible via les ondes sismiques, permet d'écrire

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{g(r)}{K} \rho^2(r)$$

3. La Terre, en tant que milieu élastique, est le terrain de jeu des ondes sismiques. Il en existe de deux types: les ondes P de pression (comme le son) et les ondes S de cisaillement. Ces ondes se propagent dans la Terre avec une vitesse qui dépend des caractéristiques physiques du milieu, en occurrence la densité ρ , le module de cisaillement μ et le module d'incompressibilité

$$V_P = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

On notera que les ondes de cisaillement ne se propagent pas dans les liquides où $\mu = 0$. Lorsqu'a lieu un tremblement de Terre, ces ondes traversent les différentes couches de la Terre. En mesurant les temps d'arrivée des ondes, les sismologues déduisent les variations spatiales des vitesses sismiques. Ils s'aperçoivent aussi que ces ondes présentent des réflexions multiples... d'où la présence de discontinuités.

4. Lorsque la Terre est soumise à une perturbation elle se met à résonner sur ses modes propres de vibration. La fréquence de ces modes nous renseigne sur la distribution de densité.

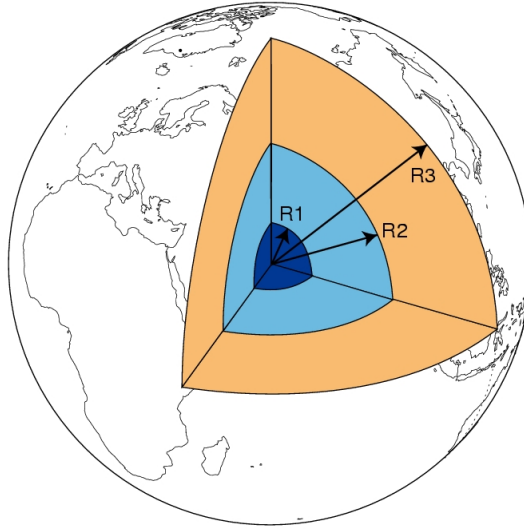


FIG. 1.1 – Schéma de la Terre, avec $R_1 = 1220 \text{ km}$, $R_2 = 3480 \text{ km}$ et $R_3 = 6371 \text{ km}$ les rayons respectifs de la graine, du noyau et de la Terre.

L'étape suivante consiste à coupler tout cela à une équation d'état $f(p, \rho, T) = 0$, où T est la température. En inversant un grand nombre de données sismiques on obtient alors ce que l'on appelle un modèle de Terre, comme le modèle PREM (Dziewonski and Anderson [1981]) illustré sur la figure 1.2. La Terre, schématisée sur la figure 1.1, a un noyau solide en

fer d'environ 1220 km de rayon, entouré d'un noyau liquide jusqu'à un rayon de 3480 km (puisque la vitesse V_S est nulle). Ce dernier semble principalement composé de fer, mais la présence d'éléments légers (oxygène, soufre...) semble nécessaire pour que le noyau ne soit pas trop lourd. Repose sur cet océan le manteau rocheux. La transition entre le manteau et le noyau à la CMB (Core-Mantle Boundary) est sujette à débat, on y place régulièrement une couche bizarre dite D". Les valeurs peuvent changer d'un modèle à l'autre, surtout que la température n'est pas forcément bien contrainte (ce point est caché dans l'équation d'état).

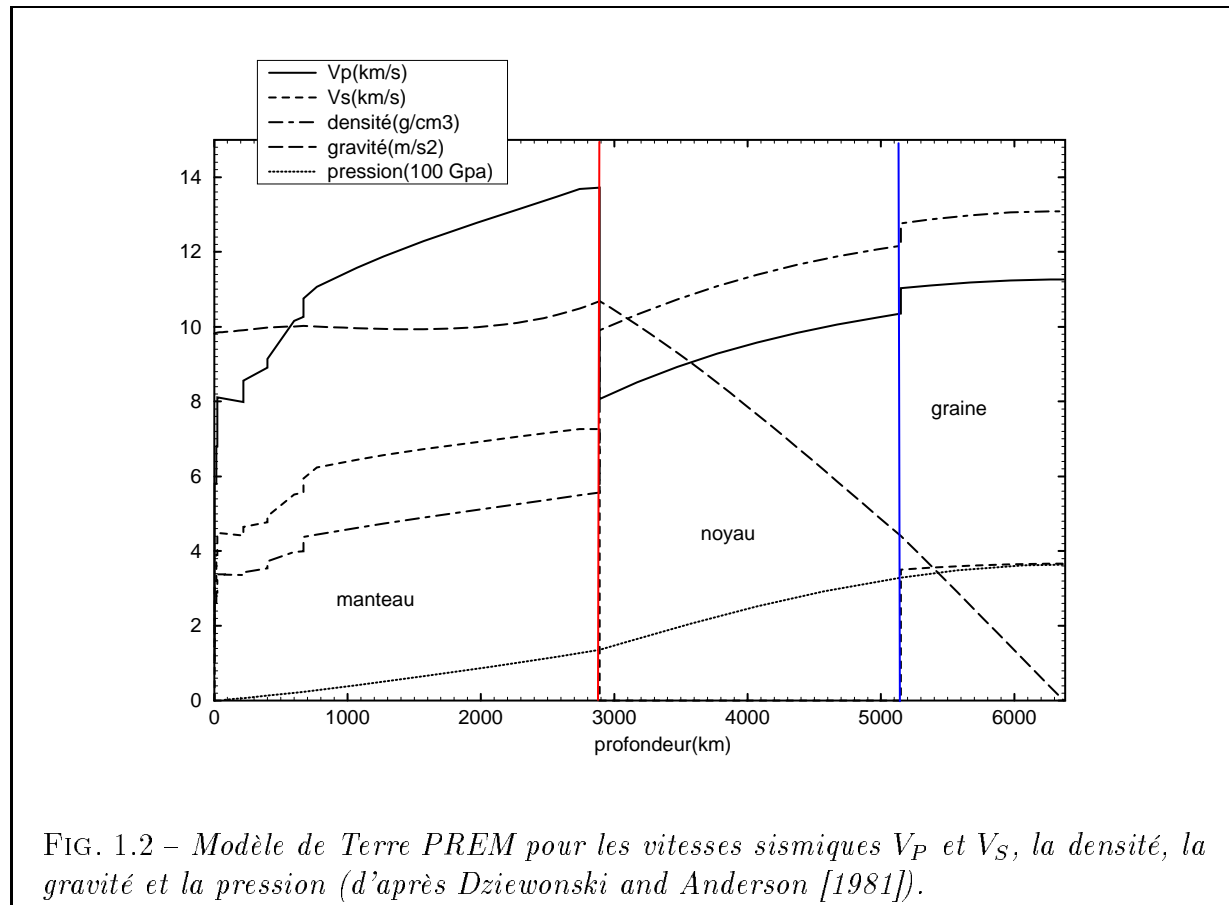


FIG. 1.2 – Modèle de Terre PREM pour les vitesses sismiques V_P et V_S , la densité, la gravité et la pression (d'après Dziewonski and Anderson [1981]).

Qu'en est-il des autres planètes? Les planètes du système solaire sont de deux types: les planètes telluriques et les géantes gazeuses. Les planètes gazeuses, comme Jupiter et Saturne, sont de manière conventionnelle représentées avec un petit noyau de roche, entouré d'une grosse couche composée d'hydrogène métallique liquide sous l'effet des hautes pressions, le tout enrobé d'une couche d'hydrogène moléculaire liquide puis gazeux à la surface. C'est une vision très édulcorée qui ne nous donne pas accès à des zones de transition entre ces différentes couches. Quant aux autres planètes telluriques (Mars, Vénus...), on considère généralement que leur composition est voisine de celle de la Terre et des météorites, à savoir très riche en fer. La raison à cela est que toutes sont nées à peu près en même temps, lors

de la formation du système solaire il y a 4.5 milliards d'années. Il semble cependant que ces planètes aient chacune leur caractères. La présence ou non d'eau à la surface, l'existence ou non de tectonique des plaques, de volcanisme ou de champ magnétique nous donne déjà $2^4 = 16$ possibilités, c'est plus qu'il nous en faut! Nous reviendrons sur cette description dans le chapitre 1.2.2.

1.2 L'observation du champ magnétique

Si cela fait assez longtemps que l'on connaît l'existence d'un champ magnétique sur la Terre, on ne sait que depuis récemment d'où il provient. Mais on ne sait toujours pas décrire précisément les mécanismes qui le génèrent...

1.2.1 Survol du champ magnétique terrestre

La boussole est utilisée comme instrument de mesure du champ magnétique terrestre depuis le $XV - XVI^{ème}$ siècle. Les mesures du champ magnétique par les grands explorateurs ont permis de reconstituer plus ou moins précisément le champ magnétique de la Terre depuis environ 400 ans (Jonkers et al. [2003]). Il a fallu attendre 1835 et Gauss pour discriminer entre une source interne et une source externe. En décomposant le champ mesuré en harmoniques sphériques, Gauss montra que son origine provenait de l'intérieur de la Terre. Ceci a depuis été précisé par les mesures dans les observatoires magnétiques. Les variations séculaires du champ terrestre excluent l'hypothèse d'un aimant permanent, et on attribue ces fluctuations aux mouvements dans le noyau liquide. Les récentes mesures par satellites (Magsat en 1980, Oersted depuis 1999...) améliorent encore nos connaissances depuis quelques décennies. A partir de ces mesures effectuées à l'extérieur de la Terre, il est possible de reconstituer le champ magnétique à la surface du noyau (voir par exemple Hulot et al. [2002]) ou Jackson [2003]) On peut noter sur la figure 1.3 que le champ magnétique terrestre présente une composante dipolaire marquée. Par ailleurs on peut avoir l'impression que les principales structures sont symétriques par rapport à l'équateur. Un grand intérêt a toujours été porté sur la dérive vers l'ouest du champ. Aujourd'hui les taches équatoriales de flux magnétique font l'objet d'une attention particulière (voir par exemple les taches A à E de la figure 1.3).

Cependant la précision spatiale de ces mesures est limitée. En effet plus les structures de champ magnétique sont petites, plus l'intensité du champ qui leur est liée à la surface de la Terre est faible. Arrive un degré de précision au delà duquel d'autres sources de champ magnétique viennent faire écran. En particulier le manteau n'est pas exactement un isolant, ce qui permet la circulation de courants électriques, et la croûte terrestre est elle aussi aimantée. A notre échelle de temps cette aimantation est permanente. Il sera sans doute possible un jour d'isoler sa contribution, en n'attribuant au champ magnétique

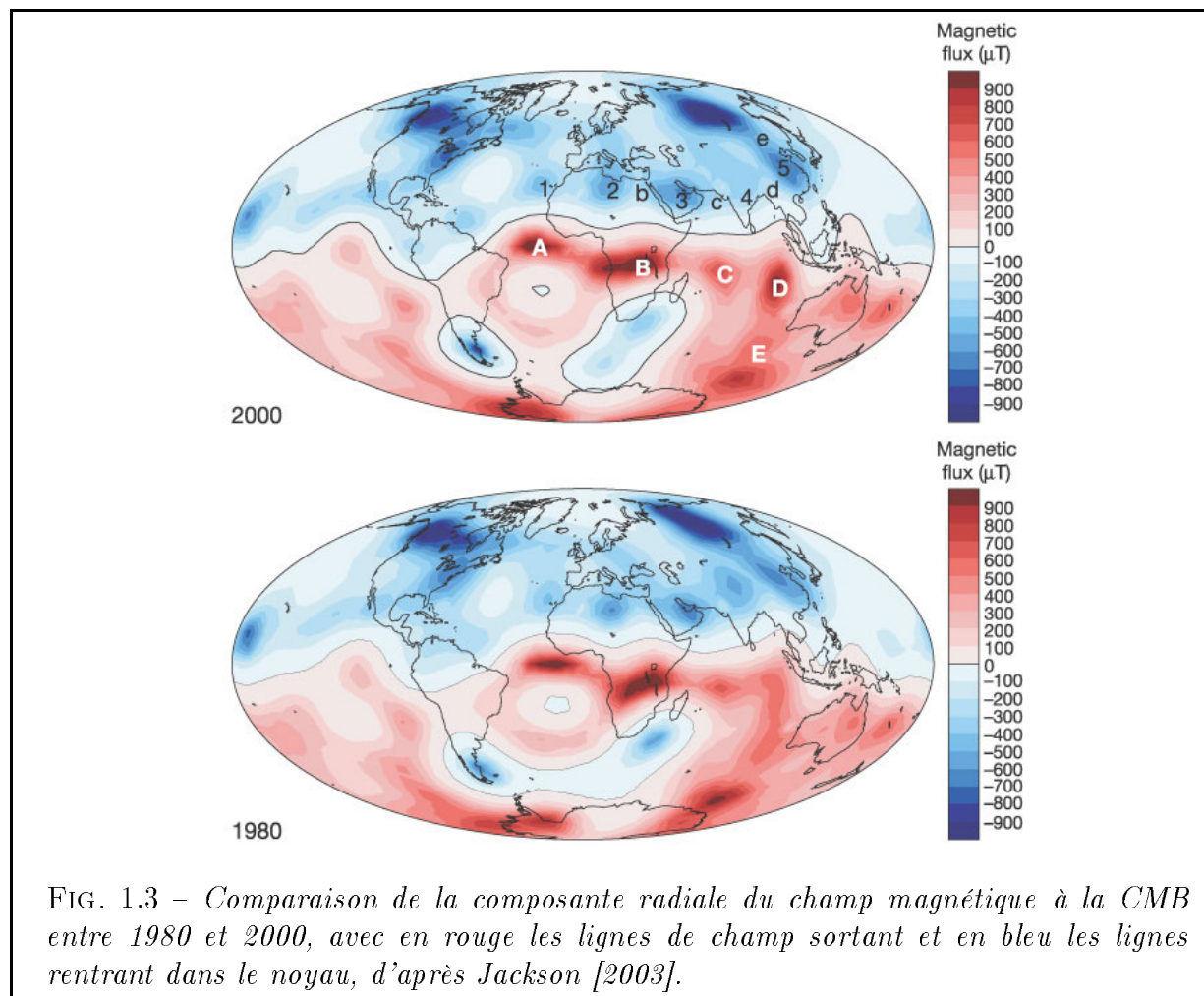
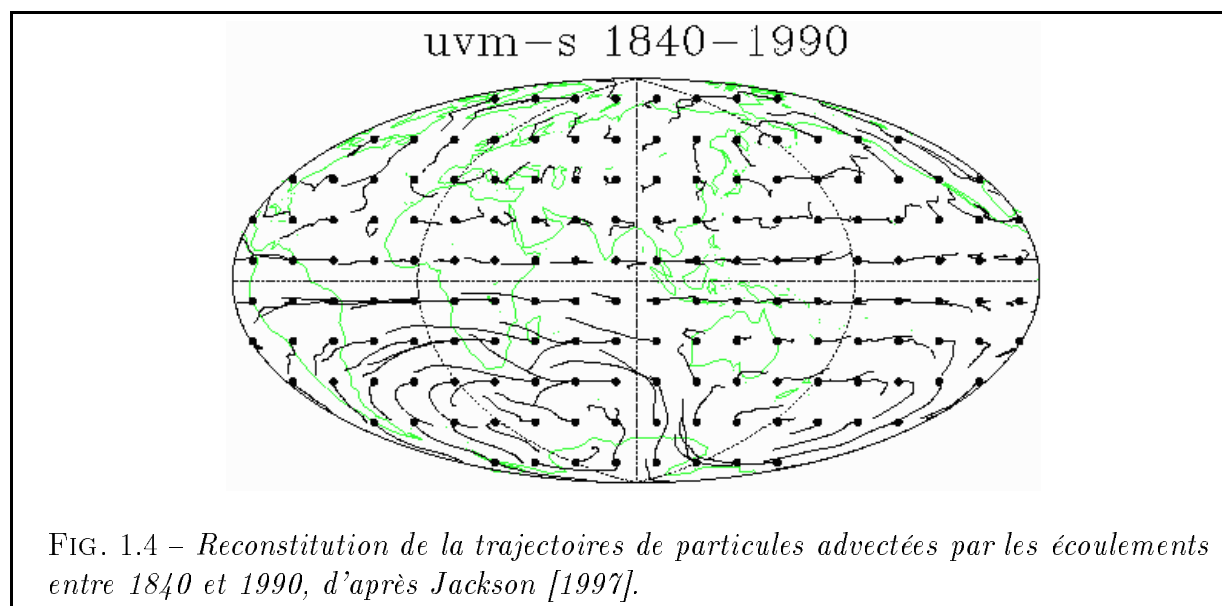


FIG. 1.3 – Comparaison de la composante radiale du champ magnétique à la CMB entre 1980 et 2000, avec en rouge les lignes de champ sortant et en bleu les lignes rentrant dans le noyau, d'après Jackson [2003].

d'origine interne uniquement les fluctuations temporelles. Pour cela il nous faut attendre de posséder des longues séries temporelles de mesure. Ces reconstitutions amènent, sous certaines hypothèses plus ou moins bien contraintes, à déduire les écoulements tangents à la surface du noyau liquide (Backus and Le Mouél [1986], Jault et al. [1988]...). Notons tout de même que ce problème est mal posé, c'est à dire qu'il n'a pas de solution unique. La figure 1.4 présente un exemple de reconstitution par Jackson [1997] des trajectoires à la surface du noyau entre 1840 et 1990. On peut y voir une intense dérive équatoriale dépendante de la longitude.

Si l'aimantation de la croûte nous limite en précision spatiale, elle recèle en revanche une source inestimable d'information dans le temps. En effet les roches crustales constituent une mémoire du champ terrestre. Après leur arrivée à la surface, la tectonique des plaques a promené ces roches au cours des millions d'années. Si l'on est capable de dater et de replacer ces roches dans leur contexte initial, on peut reconstituer le champ magnétique au cours du temps (cf Valet and Meynadier [1993]). D'autres sources d'informations nous



proviennent aussi de l'orientation des particules aimantées dans les sédiments, ou encore du magnétisme historique (terres cuites...). On peut de la sorte reconstituer la trajectoire du pôle magnétique au cours du temps (Courillot and Besse [1987]). La plus ancienne trace du champ magnétique terrestre remonte à environ 3.5 milliards d'années. C'est à dire que la Terre, vieille de 4.5 milliards d'années, a nécessairement possédé assez rapidement un champ magnétique.

On a pu aussi montrer que l'orientation du champ magnétique présente des fluctuations à des échelles de temps très variées, de la dizaine d'années à plusieurs millions d'années. En particulier l'orientation du champ magnétique est sujette à des inversions chaotiques. Le temps typique entre deux inversions est de l'ordre de 200 000 ans (avec une grosse variabilité), et le champ met environ 5000 ans à s'inverser. Il est intéressant de remarquer que l'intensité actuelle du champ terrestre est relativement forte comparée à l'intensité moyenne, qui elle n'a pas varié de façon évidente au cours des temps géologiques.

1.2.2 Bestiaire des planètes

La plupart des résultats présentés ici proviennent d'un article de synthèse sur les dynamos planétaires par Jones [2003]. Avant l'ère des missions spatiales, seule Jupiter était connue pour avoir un champ magnétique (mesures des émissions radio, Burke and Franklin [1955]). Mercure fût ensuite visitée par Mariner 10 en 1974-75. Voyager 1 et 2 ont rendu visite à Jupiter en 1979, puis Saturne, Uranus et Neptune en 1989. Plus récemment (depuis 1995) la mission Galileo tourne autour de Jupiter et de ses satellites. La mission Cassini atteindra Saturne dans le courant de l'année. Comme nous l'avons vu plus haut, les planètes du système solaire (nous entendons par là les objets suffisamment gros, y compris les

principaux satellites de Jupiter et Saturne; quelques caractéristiques sont données dans le tableau 1.1) se divisent en plusieurs catégories:

1. les planètes géantes: Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Ces planètes géantes présentent la particularité d'être composées pour partie d'hydrogène métallique (conducteur d'électricité à haute pression). Les deux premières possèdent un intense champ magnétique, dominé par un dipôle dont l'axe est légèrement incliné par rapport à l'axe de rotation. Les deux dernières ont aussi un intense champ magnétique, mais la composante dipolaire ne domine pas et on n'observe pas d'alignement avec l'axe de rotation.
2. les planètes telluriques: la Terre, Mercure et Ganymède (un satellite de Jupiter) fonctionnent aussi comme des dynamos dont le dipôle est faiblement incliné par rapport à l'axe de rotation. Le champ de Vénus n'a pas été détecté. S'il existe, son intensité est étonnamment faible comparé à celui de la Terre et de Ganymède. Vénus, Mars, Europa et Callisto (deux autres satellites de Jupiter) ou encore la Lune ne semblent pas générer de champ magnétique de nos jours. Mars et la Lune semblent avoir eu un jour un champ magnétique assez intense, aujourd'hui éteint. On peut encore citer le cas de Io (encore un satellite de Jupiter), à l'approche duquel on mesure des perturbations magnétiques. Mais sa faible distance à Jupiter rend la détection d'une dynamo incertaine (voir le chapitre 2.1.1).

planète	Ω 10^{-5} rad/s	R_P 10^6 m	R_N 10^6 m	B_{CMB} (10^{-4} T)	I_D (degrés)
Mercure	0.1	2.4	1.9	0.014	< 10
Terre	7.3	6.4	3.5	7.6	11.5
Ganymède	1.0	2.6	0.5	2.5	10
Io	4.1	1.8	1.0	0.1	?
Jupiter	18.6	70.0	56	17	9.6
Saturne	16.4	58.3	32	2.5	0.8
Uranus	10.1	25.4	18	1.3	58.6
Neptune	10.8	24.6	20	0.5	47.0

TAB. 1.1 – *Grandeurs physiques pour quelques planètes: taux de rotation Ω , rayon de la planète R_P , rayon du noyau R_N , intensité du champ à la CMB B_{CMB} , inclinaison du dipôle I_D . D'après une compilation par Chris Jones (et les valeurs indiquées dans Sarson et al. [1997] pour Io).*

Il semble bien qu'une fois de plus tous les goûts soient dans la nature... En effet, bien que la caractéristique dipolaire et l'alignement avec l'axe de rotation remporte une assez grande proportion des suffrages exprimés, les planètes du système solaire se comportent comme autant de cas particuliers. Ceci rend le problème à la fois plus complexe et plus riche, puisqu'il y a autant d'informations à glaner dans une dynamo planétaire allumée que dans une dynamo éteinte. Par exemple, pourquoi Vénus et la Terre, deux planètes somme toute assez semblables, se comportent-elles de ce point de vue aussi différemment? Par ailleurs si

on ne comprend pas encore comment on allume une dynamo, on ne comprend pas mieux comment on peut en éteindre une, comme il semble que cela soit le cas sur Mars.

Notons qu'il est une information passée sous silence jusqu'à présent: on parle du champ magnétique observable à l'extérieur des planètes, mais il existe aussi un champ magnétique cloîtré au sein du noyau, c'est à dire que ses lignes de champ se referment sur elles-mêmes. L'existence d'un tel champ est nécessaire au fonctionnement des dynamos, mais nous ne savons pas s'il est 10 fois plus intense ou simplement comparable à la composante du champ qui nous est accessible.

1.3 Quel moteur pour une dynamo planétaire?

Toutes ces questions amènent en fait à considérer les mécanismes à l'origine de ces processus dynamo, et nécessitent que l'on comprenne mieux l'histoire thermo-chimique des planètes.

1.3.1 Sources d'énergie et bilan thermique du noyau liquide

La question de l'origine des dynamos planétaires nous amène maintenant à considérer les différentes sources d'énergie disponibles. Il existe divers mécanismes pour produire des courants électriques; encore faut-il qu'ils soient suffisamment puissants. On pense le plus souvent à la convection thermique ou compositionnelle. Cependant on ne peut exclure d'autres possibilités, comme les marées ou la précession. Pour écarter ces dernières, on considère généralement que la gravité est une source d'énergie bien plus grande que la rotation, ce que mesure le rapport $\Omega^2 d/g \sim 10^{-3}$. Notons que ce n'est pas une évidence sur toutes les planètes, notamment les satellites des géantes gazeuses qui ressentent très fortement les marées associées à la présence de leur planète mère.

Une fois focalisé sur la convection, le domaine est encore vaste. Quel type de convection, et pourquoi? Cette question revient à considérer l'histoire thermique de la Terre. Qu'arrive-t-il à la Terre depuis 4.5 milliard d'années? Pour résumer, elle se refroidit. C'est à dire qu'elle donne de la chaleur à l'Univers. Du point de vue du noyau liquide, cela correspond à un flux de chaleur vers le manteau Q_S , estimé de l'ordre de 2 TW (les estimations de ce chapitre proviennent de Roberts et al. [2003]).

En se refroidissant le noyau, initialement liquide, se met un jour à cristalliser. Sous l'effet des pressions gigantesques qui règnent au centre de la Terre, cette cristallisation commence par le centre, et gagne petit à petit du terrain. Viendra un jour ou tout le noyau sera solide. Lorsqu'un liquide se solidifie, il libère de la chaleur latente de changement de phase Q_L , estimé à 4 TW. Ces estimations sont évidemment sujettes à caution. Par exemple dans ce cas précis, on ne connaît pas le diagramme de phase du mélange polyphasique qui constitue le noyau liquide.

Mais ce n'est pas tout. Le noyau, comme les météorites, est essentiellement composé de fer (Jacobs [1987]). Cependant la densité du fer extrapolée aux pressions régnant au centre de la Terre semble trop grande pour être compatible avec les estimations sismologiques de la densité du noyau liquide. Il faut donc invoquer la présence d'éléments légers, parmi lesquels l'oxygène ou le soufre. Or lorsqu'un mélange polyphasique cristallise, les éléments légers sont généralement expulsés dans le liquidus. S'ammoncellent alors à la surface de la graine (ICB: inner-core boundary) des éléments légers, que la poussée d'Archimède va amener vers l'extérieur. Ceci libère de l'énergie gravitationnelle Q_G , que l'on imagine d'environ 0.5 TW.

Une autre source possible d'énergie réside dans la présence d'éléments radioactifs (comme le potassium ^{40}K), qui pourraient libérer au sein du noyau liquide une chaleur Q_R . Cette question est ouverte, les avis divergent entre 0 et environ 4 TW. Beaucoup d'études traitent aujourd'hui de cette question (Gessmann and Wood [2002], Murthy et al. [2003]). Du point de vue du noyau liquide, il existe les flux de chaleur Q_{ICB} à l'ICB et Q_{CMB} à la CMB, associés à la présence de gradients de température. Le problème est que nous contraignons très mal à la fois les flux de chaleur et les températures. Si l'on fait le bilan de tout cela, on obtient

$$Q_{CMB} = Q_S + Q_{ICB} + Q_R + Q_G + Q_L$$

Récemment Gubbins et al. [2004] ont par exemple suggéré que la vitesse de cristallisation de la graine nécessaire au maintien d'un état convectif rendrait le noyau entièrement solide en moins de 1.2 milliards d'années. Ceci nécessiterait alors un autre apport de chaleur, par exemple radioactif. Leurs estimations tendent vers un flux à la CMB de l'ordre de 9 TW, dont 80 % serait d'origine radioactive.

1.3.2 Histoire d'une planète et dynamo

Mais qui gouverne qui dans cette histoire? On peut écrire une équation similaire pour le manteau (Labrosse et al. [1997]), en prenant en compte la production de chaleur par radioactivité dans le manteau $Q_R^M \sim 20$ TW. Le flux de chaleur à la surface de la Terre s'élève à $Q_{surf} \sim 40$ TW, ce qui nous donne

$$Q_{CMB} = Q_{surf} - Q_S^M - Q_R^M$$

avec Q_S^M le refroidissement séculaire du manteau. En termes d'ordres de grandeur, on se rend compte que le flux de chaleur à la CMB est gouverné par le flux de chaleur dans le manteau. C'est à dire que l'état convectif du noyau dépend de la composition du manteau... donc de l'histoire thermo-chimique de la planète. Par exemple une planète dont le manteau est pauvre en éléments radioactifs se refroidira (donc cristallisera) beaucoup plus vite, et peut ainsi voir sa dynamo s'éteindre. Autre cas extrême: une planète très chauffée (par des effets de marées comme Io dans le champ de gravité jovien, ou par une forte radioactivité

mantellique) aura des difficultés à évacuer de la chaleur du noyau, et donc aura du mal à produire de la convection... autre raison pour ne pas observer de dynamo. On peut aussi se demander s'il est possible d'avoir de la convection sans la présence d'une graine (i.e. sans chaleur latente). Si la réponse est non, la graine a plus de 3.5 milliards d'années, et cela peut peut-être expliquer pourquoi certaines planètes n'ont pas de dynamo.

Du point de vue de la dynamo ces questions sont importantes, car elles déterminent la nature du moteur des mouvements et l'état convectif. La convection a-t-elle la même allure lorsque le chauffage est interne (radioactivité) ou lorsque l'on impose un flux de chaleur aux frontières (chaleur latente)? On sait par ailleurs que les métaux diffusent bien la chaleur, alors que la diffusion de matière est difficile. Alors il doit exister une différence de comportement entre une convection thermique et une convection solutale.

Un bilan plus complet nécessiterait de connaître la température dans le noyau. Cette question est complexe, et nécessite de considérer l'équation de l'entropie du système (Labrosse et al. [1997]). Les ordres de grandeur auxquels on aboutit pour la Terre sont les suivants: les températures à la surface de la graine et du noyau liquide sont respectivement de l'ordre de $T_{CMB} \sim 4000 \text{ K}$ et $T_{ICB} \sim 5100 \text{ K}$. Ces températures sont associées à un flux de chaleur Q_{CMB} de l'ordre de 5 TW. Attention! vu les incertitudes, on n'est pas à un facteur 2 près....

Chapitre 2

Différentes approches d'un problème trop compliqué

2.1 Vision théorique des dynamos planétaires

Les premiers travaux théoriques sur la dynamo remontent à la première moitié du siècle. L'effet dynamo est d'abord évoqué dans le contexte solaire par Larmor en 1919. Le principe général est le suivant: les écoulements et le champ magnétique sont couplés par les équations de Navier-Stokes et l'équation d'induction (voir le chapitre 1). Le problème à résoudre est le suivant: quelle(s) condition(s) les écoulements doivent-ils remplir pour pouvoir générer spontanément un champ magnétique robuste à partir d'une fluctuation infinitésimale?

En 1936 Cowling montre qu'il n'existe pas d'écoulement capable d'auto-induire un champ magnétique axisymétrique, ce qui indique que la topologie du champ magnétique ne peut pas être trop simple. NB: si le champ de la Terre semble principalement axisymétrique, ce n'est qu'en moyennant sur une période suffisamment longue... instantanément, même s'il reste dominé par la partie axisymétrique, ce n'est pas le cas!

Dans la recherche de conditions à imposer aux écoulements pour favoriser l'effet dynamo, de gros progrès théoriques (Elsasser [1946], Bullard and Gellman [1954]...) et expérimentaux (Lehnert [1958]) ont ensuite lieu dans les années 1940-50, avec l'introduction des effets α et ω . Il faudra en fait attendre les années 1970 pour voir apparaître les premières dynamos dites cinématiques (i.e. sans la rétroaction du champ magnétique sur les écoulements: la force de Lorentz). Mais lorsque l'on a une dynamo cinématique on n'a pas encore résolu le problème, car la force de Lorentz est telle qu'elle rendra le problème toujours plus difficile à résoudre.

Face à ce problème un peu trop compliqué, les chercheurs n'ont pas attendu l'avènement des gros calculateurs pour réfléchir. Chandrasekhar [1961], puis Roberts [1968], Busse [1970],

Soward [1979] et bien d'autres s'attaquent à ces questions de manière dite "asymptotique". C'est à dire qu'ils tentent de tirer parti des ordres de grandeur des différentes forces mises en jeu pour "simplifier" le problème. L'idée sous-jacente réside dans l'importance de la force de Coriolis, comme c'est le cas dans l'océan et l'atmosphère. Cette particularité change la donne, et ces écoulements dit géophysiques possèdent la caractéristique bien particulière d'être comme rigidifiés dans la direction de l'axe de rotation (cf le chapitre 2). La présence d'un grand nombre de dynamos quasiment alignées avec l'axe de rotation est-elle alors une coïncidence?

Du point de vue du champ magnétique, on peut montrer que pour allumer une dynamo, il faut que le temps de diffusion du champ d^2/λ soit plus grand que le temps d/U lié à son advection par les vitesses (dans un rapport qui dépend de la géométrie de l'objet). U et d sont les ordres de grandeur des vitesses et de la taille des objets considérés, λ la diffusivité magnétique. Compte tenu que la démonstration mathématique sous-estime le seuil dynamo, cette condition peut s'écrire

$$R_m = \frac{Ud}{\lambda} > O(10) \quad (2.1)$$

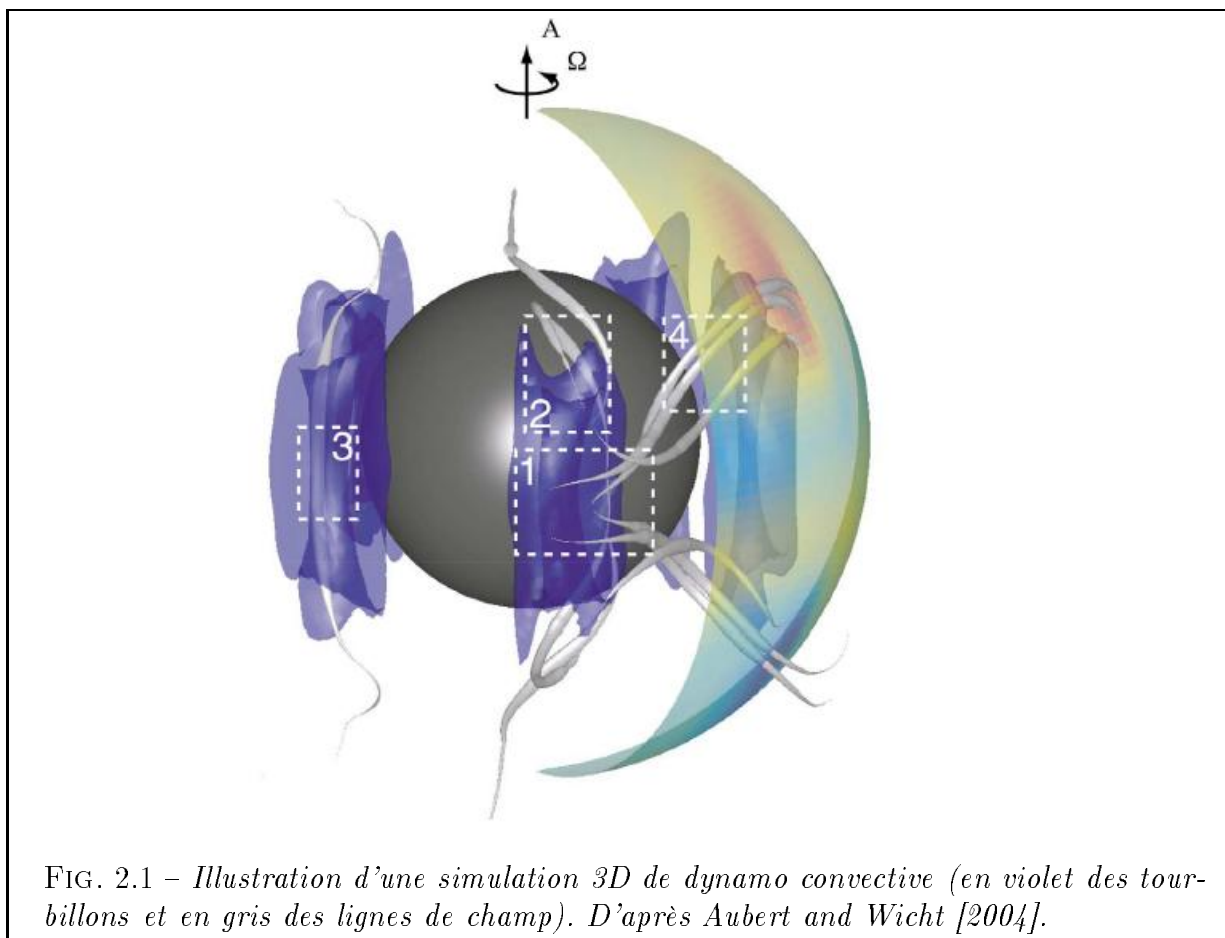
R_m est appelé le nombre de Reynolds magnétique. Dans la Terre, les vitesses sont estimées de l'ordre de 10^{-4} m/s . Par ailleurs on estime $\lambda \simeq 2 \text{ m.s}^{-2}$ dans les noyau planétaires en fer. Pour la taille, si l'on prend la distance ICB-CMB $d \sim 2000 \text{ km}$ (voisine de la taille des grosses structures de champ observées), on obtient alors $R_m \sim 100$, ce qui semble compatible avec l'existence d'une dynamo. On peut tout de même se demander à partir de quelle taille caractériser ce nombre: doit-on prendre l'échelle de la cavité fluide où l'échelle des tourbillons?

Le temps de diffusion magnétique estimé pour la Terre est alors de l'ordre de 20 000 ans. C'est en gros le temps que met une structure magnétique à mourir si rien ne vient l'entretenir. Cela veut aussi dire que dans la Terre des mouvements doivent nécessairement exister depuis longtemps si l'on veut expliquer un champ de plus de 3 milliards d'années.

On voit tout de suite apparaître quelques questions. A moins de vitesses gigantesques, une petite planète aura des difficultés à produire un champ magnétique pérenne. Cela pose un problème pour Ganymède: étant donné la petite taille de son noyau, il doit exister de grandes vitesses si l'on veut expliquer la présence d'une dynamo. Qui dit grandes vitesses dit grand flux de chaleur à la CMB. Mais quand on est petit et que l'on perd beaucoup de chaleur, on ne vit pas très longtemps (c'est comme la déperdition de chaleur des animaux en fonction de leur taille: ça dépend du rapport surface sur volume... difficile d'être un petit animal à sang chaud dans des contrées froides quand on hiberne, à moins de baisser sa température!). Doit-on y voir l'indice d'une source interne de chaleur dans Ganymède (radioactivité, précession, marées?) très forte comparée à la Terre?

2.2 Avantages et inconvénients des dynamos numériques

Les avancées des calculateurs ces dernières années ont permis de créer, depuis le milieu des années 1990, des dynamos numériques qui présentent des comportements ressemblant à ceux de la Terre. On y trouve tout un panel de comportements intéressants. Glatzmaier and Roberts [1995] reproduisent un champ magnétique auto-entretenu présentant des inversions dans une géométrie sphérique 3D. L'exploration de la gamme des paramètres a permis depuis de reproduire divers types de dynamos (dipolaires, quadripolaires..., voir Christensen et al. [1999] pour une synthèse). Récemment des dipôles équatoriaux semblables à ceux présents sur Uranus et Neptune ont aussi été générés (Stanley and Bloxham [2004], Aubert and Wicht [2004]). C'est ce qu'illustre la figure 2.1 où l'on peut voir des tourbillons et quelques lignes de champ qui interagissent pour former une dynamo convective.



Le problème est que pour perpétrer toutes ces simulations on est obligé de paramétrer de manière un peu cavalière la physique des matériaux. Ceci apparaît clairement lorsque l'on

veut décrire les couches limites près des bords solides et les mouvements turbulents:

1. La turbulence d'un fluide est caractérisée par le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{Ud}{\nu}$$

le rapport entre le temps visqueux d^2/ν et le temps d'inertie d/U ; ν est la viscosité cinématique. La condition (2.1) peut alors s'écrire

$$Re > 10 \frac{\lambda}{\nu}$$

Dans les métaux liquides ce rapport est mesuré par le nombre de Prandtl magnétique

$$Pm = \frac{\nu}{\lambda}$$

de l'ordre de 10^{-6} ... on voit tout de suite qu'il faut alors atteindre des nombres de Reynolds gigantesques ($Re \sim 10^7$!), ce qui est hors de portée des ordinateurs.

2. Les couches limites sont aussi un souci, principalement parce que la Terre tourne relativement vite, c'est à dire que la force de Coriolis devient incontournable. En particulier elle apporte une bien plus grande contribution que la viscosité dans le coeur du fluide, ce que caractérise le nombre d'Ekman

$$E = \frac{\nu}{\Omega d^2}$$

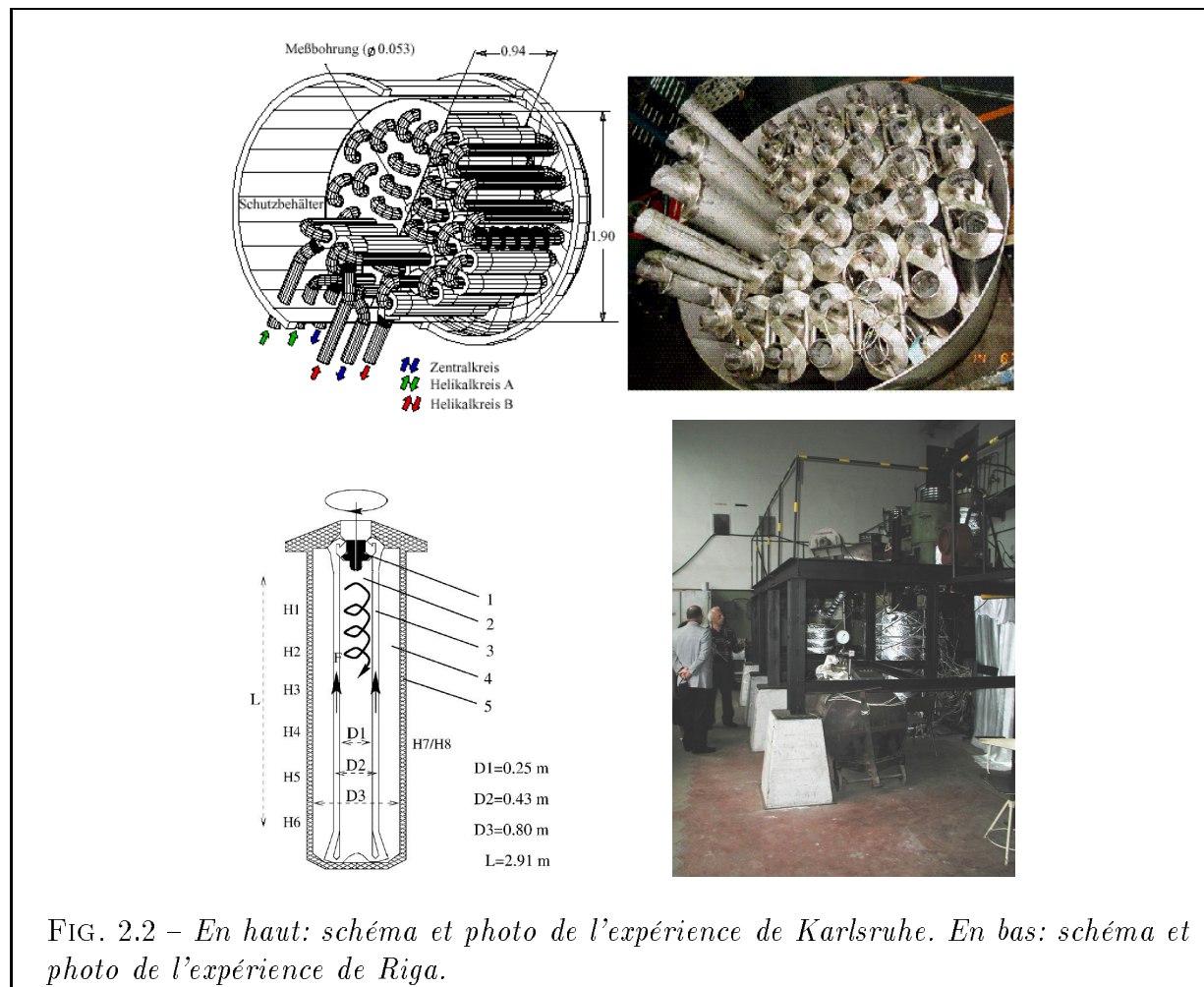
rapport entre le temps visqueux et le temps d'une rotation Ω^{-1} . Pour la Terre ce nombre très petit: $E \sim 2 \cdot 10^{-14}$! Par contre aux frontières du noyau le rôle de la viscosité réapparaît, ce qui se traduit par la présence de couches limites d'Ekman très fines et donc difficiles à résoudre numériquement (pour la Terre, elles sont de l'ordre de mètre! voir le chapitre 2.3.2).

L'astuce numérique consiste alors à utiliser des viscosités bien plus grandes. Les simulations 3D les plus poussées descendent à des nombres d'Ekman d'environ $O(10^{-5})$ (suivant que l'on utilise ou pas l'hyper-viscosité, c'est à dire une viscosité artificielle augmentant avec le nombre d'onde... tout un débat!). On peut comprendre cela ainsi: pour un tel nombre d'Ekman, si l'on garde le taux de rotation de la Terre ($\Omega = 7 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$) cela revient à considérer que le noyau liquide est visqueux comme du verre, alors qu'en fait sa viscosité est proche de celle de l'eau!

La justification physique d'une telle viscosité est tout un sujet de controverse. C'est la question de la viscosité dite turbulente. Pour un fluide turbulent, la diffusion de quantité de mouvement ne se fait plus uniquement à l'échelle moléculaire mais principalement à une échelle plus grande (celle de petits tourbillons, mais ce n'est pas très clair), et tout se passe alors comme si la viscosité s'en trouvait augmentée. Cela a été vérifié par des mesures *in situ* dans les océans et l'atmosphère, où l'on mesure des viscosités turbulentes plus grandes que la viscosité moléculaire de plusieurs ordre de grandeurs. Mais dans le noyau on n'a aujourd'hui que de bien vagues idées de cette grandeur (Brito et al. [2004]). La modélisation de la turbulence occupe aujourd'hui une grande part des débats.

2.3 Le pari des dynamos expérimentales

Les deux premières (et seules jusqu'à aujourd'hui) dynamos expérimentales ont vu le jour en 1999, la première à Riga (Gailitis et al. [2000]) et la seconde à Karlsruhe (Müller and Stieglitz [2000]). Elles sont illustrées sur la figure 2.2. Ces dynamos sont produites par des écoulements de sodium liquide. Ce métal est le meilleur conducteur d'électricité liquide à des températures accessibles, et ses propriétés sont assez proches de celle du fer liquide sous haute température. Ces expériences possèdent donc des propriétés physiques proches de celles des noyaux planétaires. Le problème des couches limites précédemment évoqué n'en est pas un dans les expériences. Par ailleurs il est possible d'atteindre dans un laboratoire des grands nombres de Reynolds. Cependant atteindre de grands Re n'est pas suffisant, encore faut-il que l'écoulement présente une géométrie *ad hoc* pour pouvoir générer un champ magnétique.



En fait tout le problème des expériences est là. Dans les deux dynamos ayant fonctionné,

le fluide était contraint de passer dans des tuyaux, eux-mêmes conçus pour que le fluide n'aille pas batifoler là où ça n'aurait aucun intérêt du point de vue du champ magnétique. La géométrie des expériences était en fait basée sur des dynamos cinématiques. La question des dynamos reste donc ouverte: que ferait le fluide si on le laissait faire? C'est l'objectif des projets dynamos dits de deuxième génération que de laisser un degré de liberté aux écoulements. Mais alors il faut s'assurer d'une source énergétique suffisamment efficace pour maintenir de grands nombres de Reynolds.

De ce point de vue la convection thermique est-elle un bon candidat? C'est un des objectifs de l'équipe "géodynamo" à Grenoble, et donc de cette thèse, que de mesurer la possibilité d'une dynamo convective. La question revient en fait à savoir comment le nombre de Reynolds magnétique évolue avec le flux de chaleur. Pour un fluide donné, cela amène à se poser la question de l'évolution à la fois des vitesses et de la taille des cellules convectives. C'est l'objet des études expérimentales de convection développée en rotation rapide qui ont vu le jour ces dernières décennies. Ces études sont basées soit sur de la visualisation optique (Cardin and Olson [1994], Manneville and Olson [1996]) soit sur des mesures de fluctuations de température et de flux de chaleur (Sumita and Olson [2000], Sumita and Olson [2003]). Ce n'est que récemment que des mesures directes de vitesse ont été effectuées (Aubert et al. [2001]).

D'autres projets de deuxième génération ont choisi une autre source énergétique. L'expérience Von Karman Sodium (VKS) à Cadarache (France) est basée sur le cisaillement d'un fluide à l'aide de pales dans un cylindre (Bourgoin et al. [2002], Marié et al. [2002]). Le projet de College Park (Maryland) est basé sur le même principe, mais dans une sphère en rotation (Peffley et al. [2000], Shew et al. [2002]). On peut encore citer des projets de dynamo basés sur la précession à Meudon (France), sur un écoulement de type Taylor-Couette à Socorro (New-Mexico), ou dans un tore en rotation rapide brutalement stoppé à Perm (Russie)...

2.4 Comment faire ressortir les phénomènes physiques?

Les questions concernant les dynamos planétaires risquent donc de durer un certain temps, puisqu'à l'heure actuelle les observations ne sont pas suffisantes pour discriminer entre telle ou telle source énergétique, que les modèles numériques sont incapables de reproduire des fluides réalistes et que la convection semble une source de dynamo expérimentale hors de portée.

L'équipe "géodynamo" de Grenoble a pris le parti d'oublier momentanément l'idée d'une dynamo, pour se placer dans des conditions où la physique des noyaux planétaires doit ressortir. On entend par là un régime où à la fois la rotation et le champ magnétique sont importants. Ce régime, dit magnétostrophique, est caractérisé par le nombre d'Elsasser,

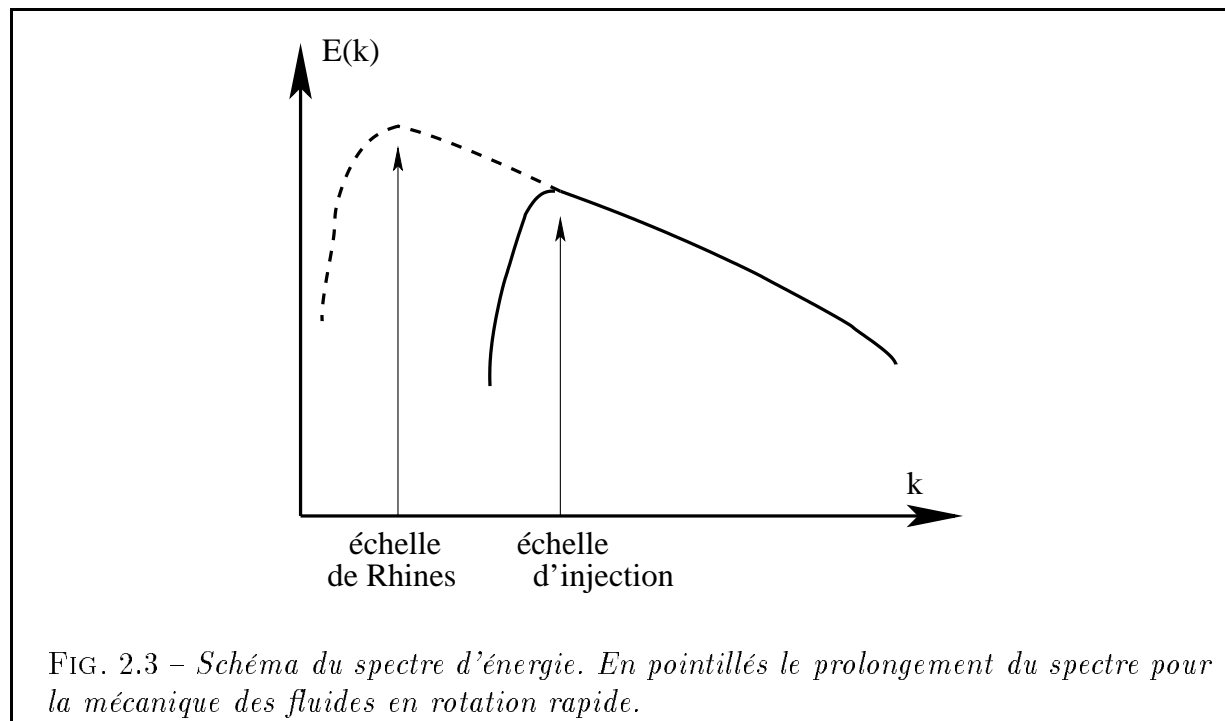
rapport entre les ordres de grandeur des forces de Lorentz et de Coriolis

$$\Lambda = \frac{\sigma B^2}{\rho \Omega}$$

où B est l'intensité du champ magnétique et σ la conductivité électrique du milieu. L'estimation de ce nombre dans les planètes n'est pas très précise, puisque l'on n'a pas accès à la composante du champ qui ne sort pas du noyau (cf le chapitre 1.2.2). On pense généralement qu'il est de l'ordre de $O(1)$ dans la Terre, mais il semblerait que des dynamos à faible Λ existent aussi. Pour donner quelques ordres de grandeur, G. Schubert (dans une synthèse au congrès sur les dynamos planétaires, Les Houches, Avril 2003) estime Λ de l'ordre de 10^{-1} pour Jupiter, 10^{-3} pour Mercure et Uranus, $5 \cdot 10^{-2}$ pour Ganymède.

L'intérêt d'approcher le régime magnétostrophique est le suivant: on sait que la physique des fluides en rotation est très spéciale, et en particulier on peut relever deux particularités géométriques:

1. comme évoqué précédemment les écoulements sont rigidifiés le long de l'axe de rotation (voir la figure 1.2 de la partie II).
2. la turbulence autorise le maintien d'échelles intermédiaires entre les grandes échelles et l'échelle d'injection (l'échelle de Rhines, voir le paragraphe 2.1 (partie II) et la figure 2.3). Cette question est cruciale, car si la rotation autorise ainsi de grandes tailles, elle aide alors à atteindre de grands nombres de Reynolds magnétiques.



Alors à partir de quelle intensité du champ magnétique le fluide va-t-il changer de comportement, et ce de quelle manière? Pour cela l'équipe "géodynamo" travaille à l'heure

actuelle sur le projet Derviche Tourneur Sodium (DTS), qui consiste en une expérience de Couette sphérique en rotation rapide (rotation différentielle de la graine), en présence d'un champ magnétique imposé. La première étape de ce projet a motivé une partie de la thèse de Daniel Brito (Brito [1998]) sur l'étude expérimentale du comportement d'un tourbillon de gallium traversé par un champ magnétique transverse, le tout en rotation rapide. A suivi la thèse de Julien Aubert (Aubert [2001]), sur l'étude numérique et expérimentale de la convection développée dans une sphère en rotation rapide (en eau et en gallium). La troisième étape de ce projet est à l'origine de deux thèses: celle de Nathanaël Schaeffer sur l'étude d'un écoulement de Couette sphérique en rotation rapide (travail numérique et expérience "Derviche Tourneur" en Eau), et celle présentée ici sur l'étude numérique et expérimentale de la convection en rotation rapide en présence d'un champ magnétique imposé (magnéto-convection). Une question centrale de cette thèse est de savoir comment la structure des écoulements est modifiée par la présence d'un champ magnétique, et comment cela se répercute sur les vitesses ou le flux de chaleur.

Ce travail s'articule en trois parties. Dans la première partie nous dérivons, à partir des équations de base, le modèle numérique dit "Quasi-Géostrophique" utilisé dans cette étude. La seconde partie est consacrée à la convection en rotation rapide (sans champ magnétique). Ce problème constitue une grande partie de ce travail et suscite un certain nombre d'interrogations. Il nous a semblé nécessaire de revenir longuement sur cette question avant de passer à la convection en rotation rapide en présence d'un champ magnétique, le sujet de la troisième partie. De la sorte les ingrédients (rotation, convection, champ magnétique) sont ajoutés les uns après les autres. On peut assez vite être perdu dans ce problème, et nous avons parfois jugé utile de redécortiquer quelques articles théoriques (en particulier Soward [1979], qui a lui seul m'a occupé un grand moment durant ces trois années). Notons que cette étude présente à la fois une approche expérimentale et une approche numérique. Notre cheminement nous amène régulièrement à passer de l'une à l'autre. Il nous a alors semblé bon de décrire précisément quelques points techniques, pour que le lecteur puisse se rendre compte de la validité ou non des comparaisons.

Il pourra sembler au lecteur que ce travail de thèse est en grosse partie numérique. Au regard du temps consacré aux soudures, fuites, nettoyage des oxydes de gallium, recherche du signal, etc., ce n'est pas le cas. Dans ce contexte il faut aussi souligner qu'un travail expérimental de ce type relève d'un travail d'équipe.

NB: Pour alléger un peu les notations, la numérotation repart de (1.1) à chaque début de partie. La référence des équations renvoie par défaut à une équation de la même partie. Lorsque l'on fait référence à une équation d'une autre partie, le numéro de la partie apparaît alors en indice (par exemple: (2.15)_{II} renvoie à l'équation (2.15), partie II).

Première partie

LA FORMULATION DU PROBLEME

Chapitre 1

Les équations générales du problème

Cette partie se décompose en deux chapitres. Dans le premier nous développons les équations générales liées à notre problème, qui relève à la fois de l'électro-magnétisme, de la thermodynamique et de la mécanique des fluides. Tout ce qui concerne le champ magnétique sera momentanément oublié par la suite, et ne reparaîtra que dans la troisième partie consacrée à la magnéto-convection.

A partir de ce formalisme valable dans un espace tri-dimensionnel, nous décrivons dans le chapitre 2 le passage à notre modèle dit "Quasi-Géostrophique". Ce modèle tire parti de la rotation rapide du fluide, associée à la prédominance de la force de Coriolis. Nous détaillons les conséquences de cette particularité sur les équations de quantité de mouvement et de la chaleur.

1.1 Des équations de Maxwell à l'équation d'induction

1.1.1 Les équations de Maxwell

Nous écrivons ici les équations de Maxwell associées aux champs magnétique \mathbf{B} et électrique \mathbf{E} , aux densités de courants électriques \mathbf{j} et aux densités de charge électrique ρ_e (on néglige les effets de polarisation électrique et de magnétisation):

$$\nabla_{\times} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Loi d'induction de Faraday} \quad (1.1)$$

$$\nabla_{\times} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{Loi d'Ampère} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad \text{Loi de Coulomb} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad \text{Absence de charges magnétiques} \quad (1.4)$$

avec c la vitesse de la lumière dans le vide, μ_0 la perméabilité magnétique du vide, ε_0 la permittivité du vide et $(\varepsilon_0\mu_0)^{-1} = c^2$. Pour une vision complète des questions abordées ici, on pourra se référer à Gubbins and Roberts [1987].

1.1.2 La loi d'Ohm

Dans un fluide de conductivité électrique σ (supposée constante), animé d'une vitesse \mathbf{u} dans un référentiel \mathcal{R}_0 , les courants électriques se décomposent entre les transports de charges advectées par le fluide et les courants de conduction (associés au mouvement d'ions ou d'électrons):

$$\mathbf{j} = \rho_e \mathbf{u} + \mathbf{j}_c$$

Dans l'hypothèse où $(u/c)^2 \ll 1$, on peut négliger l'advection de charge (i.e. $\mathbf{j} \sim \mathbf{j}_c$). Dans le référentiel \mathcal{R} de la particule fluide les courants s'écrivent alors

$$\mathbf{j}_{\mathcal{R}} \sim \mathbf{j}_{c\mathcal{R}} = \sigma \mathbf{E}_{\mathcal{R}}$$

Par ailleurs on peut relier (au premier ordre en u/c) la densité de courant et le champ électrique dans les deux référentiels:

$$\mathbf{j}_{\mathcal{R}} = \mathbf{j}_{\mathcal{R}_0}$$

$$\mathbf{E}_{\mathcal{R}} = \mathbf{E}_{\mathcal{R}_0} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_{\mathcal{R}_0}$$

On obtient alors la loi de comportement pour les courants électriques, ou loi d'Ohm, dans le référentiel \mathcal{R}_0 :

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.5)$$

Notons au passage que l'hypothèse $(u/c)^2 \ll 1$ nous permet de simplifier ainsi la loi d'Ampère

$$\nabla_{\times} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.6)$$

1.1.3 L'équation d'induction

En combinant le rotationnel de l'équation de Faraday (1.1) avec l'équation d'Ampère (1.6), dans laquelle on introduit la loi d'Ohm (1.5), on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla_{\times} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \lambda \nabla_{\times} (\nabla_{\times} \mathbf{B})$$

avec $\lambda = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ la diffusivité magnétique. L'équation (1.4) (l'absence de charge) nous amène alors à l'équation d'induction

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla_{\times} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \lambda \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.7)$$

où le premier terme du membre de droite est la force électromotrice.

1.2 L'équation de la chaleur

Nous avons vu en introduction que la question des flux de chaleur est complexe dans les objets du type de la Terre. Sous certaines hypothèses que nous allons brièvement présenter, il est possible de présenter l'équation de la chaleur en fonction de la température.

1.2.1 Qu'est-ce que la convection?

Que se passe-t-il lorsqu'un fluide doit évacuer de la chaleur? Il a deux façons de le faire: soit cette chaleur est évacuée de proche en proche, par conduction, soit ce mécanisme n'est pas assez efficace pour tout transporter, auquel cas ce liquide va se mettre en mouvement et advecter la chaleur. Le moteur des mouvements se trouve dans la force d'Archimède, puisqu'un fluide qui s'échauffe voit sa densité diminuer. Pour savoir si un fluide va se mettre à convecter, il faut comparer la force d'Archimède avec le frein au mouvement, à savoir la viscosité du fluide, et le frein au moteur du mouvement, à savoir la diffusion thermique. En effet, plus un fluide est visqueux et plus les mouvements seront difficiles; par ailleurs plus un fluide diffuse la chaleur et moins il aura besoin de se mettre en mouvement pour la transporter. Nous reviendrons sur cette question dans la description de la force d'Archimède dans le paragraphe 1.3.

En pratique, la convection prend place lorsque le flux de chaleur est supérieur à un flux de chaleur critique: $Q > Q_{crit}$. Comment cela se traduit-il dans le noyau des planètes? Le flux de chaleur radial se divise entre le flux conduit le long du gradient de température (loi de Fourier)

$$Q_{cond} = -k \frac{dT}{dr}$$

où k est la conductivité thermique, et le flux advecté par les mouvements

$$Q_{adv} = -\rho C_p u_r T$$

avec C_p la chaleur spécifique à pression constante. En intégrant sur une sphère S de rayon r on obtient

$$Q = -4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} - \rho C_p \int_S u_r T dS$$

Pour que la convection prenne place, il faut initialement que le gradient de température soit plus grand qu'un gradient critique:

$$\frac{dT}{dr} > \left[\frac{dT}{dr} \right]_{crit}$$

Lorsque les mouvements convectifs vont se mettre en place, ils vont homogénéiser la température dans le coeur du fluide. Faisons un instant l'hypothèse que la convection a mis en mouvement tout le noyau liquide. Si l'on se place à la CMB, où les vitesses sont nécessairement nulles, le flux de chaleur est directement lié au gradient de température

$$Q_{CMB} = -4\pi R_N^2 k \left[\frac{dT}{dr} \right]_{CMB}$$

Une condition nécessaire pour que la convection naisse est alors $Q_{CMB} > Q_{crit}$. En pratique, étant donné la taille des planètes, les estimations de Q_{crit} correspondent à des gradients de température extrêmement faibles. Mais le problème est en fait plus compliqué.

1.2.2 Le gradient adiabatique

Il faut avoir en tête que la présence de convection au sein des noyaux liquides n'est pas une évidence. Considérons pour cela que le noyau est un système bien mélangé (pas nécessairement par la convection). Autrement dit, il se trouve dans un état isentropique, ce qui est compatible avec le profil de densité PREM de la figure 1.2. Or l'entropie S est fonction de la pression et de la température (NB: en toute rigueur il faudrait aussi prendre en compte la composition chimique: nous l'oublions volontairement ici pour simplifier notre vision du problème). On peut alors écrire

$$dS = \frac{C_p}{T} dT - \frac{\alpha}{\rho} dp$$

avec α le coefficient d'expansion thermique. Dès lors si on déplace de manière isentropique un élément de fluide vers le haut (resp. vers le bas), la pression l'environnant va chuter (resp. augmenter), et par conséquent sa température va diminuer (resp. augmenter). En considérant la pression hydrostatique - équation (1.1) de l'introduction - l'évolution de la température avec la profondeur prend la forme

$$\left[\frac{dT}{dr} \right]_{isoS} = - \frac{g(r) \alpha T_{isoS}}{C_p}$$

avec T_{isoS} le profil de température isentropique et g la gravité définie par l'équation (1.2) de l'introduction. Or qui dit gradient de température dit flux de chaleur (toujours la loi de Fourier)

$$Q_{isoS} = -k \left[\frac{dT}{dr} \right]_{isoS}$$

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la chaleur n'est évacuée par convection uniquement si l'on dépasse un certain seuil, au delà duquel la conduction ne suffit plus. Dans le cas des planètes (et de tous les objets présentant des effets de compression importants)

le problème n'est plus tout à fait le même. Le gradient de température isentropique est la conséquence du mélange. Sans mélange, le profil de température serait différent. La question qui nous intéresse ici est de savoir quelle part des perturbations de densité (disons de température) participe à la poussée d'Archimède. Toute la variation de température par détente ou compression est perdue. En d'autres termes tout le flux de chaleur conduit par l'adiabat est perdu pour la convection. Une condition nécessaire pour avoir de la convection est alors que le flux de chaleur vérifie

$$Q > Q_{isoS}$$

au moins dans une région du noyau liquide (NB: ce n'est pas parce que localement $Q < Q_{isoS}$ que le fluide dans cette région serait au repos). Notons qu'il n'est pas évident de reconstituer le profil de température isentropique. En particulier le coefficient α varie avec la température, grandeur peu contrainte. Ainsi le profil de température $T_{isoS}(r)$ (à partir duquel on définit l'écart au profil isentropique $T - T_{isoS}$) pourrait prendre une forme telle qu'une partie du noyau soit en état convectif et l'autre partie au repos.

1.2.3 L'approximation de Boussinesq

La modélisation de la convection fait souvent appel à l'approximation dite de Boussinesq. Cette approximation met en jeu un grand nombre d'hypothèses (voir Gubbins and Roberts [1987] ou Tritton [1988]) que nous ne rappellerons pas ici. L'idée sous-jacente est la suivante: comment réconcilier une approche de fluide incompressible avec la convection, qui repose par essence sur la dilatation du fluide?

Le principe de cette approximation est de considérer que tous les phénomènes liés à la compressibilité du fluide sont négligeables, sauf ceux associés à la gravité. Il faut pour cela considérer tout d'abord que les écarts de température sont relativement faibles. Cela pourrait paraître étrange dans le noyau terrestre avec des écarts de température de $1000^\circ C$. Mais nous considérons en fait l'écart au profil adiabatique, qui est bien plus faible.

Il faut aussi que le fluide ait des propriétés rhéologiques pas trop exotiques, par exemple que la viscosité ne soit pas trop dépendante de la température. Comme autre limite on peut aussi évoquer la nécessité d'un faible chauffage par frottement visqueux, et par effet Joule si l'on prend en compte le champ magnétique (voir le paragraphe 1.2.3 de la partie III).

1.2.4 L'équation de la chaleur

On s'intéresse à l'équation qui régit l'énergie interne $\mathcal{E}(P, T)$ (NB: A partir de maintenant T est l'écart au profil isentropique défini plus haut). Dans le cas d'un fluide de Boussinesq

l'énergie interne ne dépend pas de la pression et l'on peut écrire

$$\mathcal{E} = C_p T$$

On se placera ici dans le cas du chauffage différentiel, à savoir que l'on contrôle la température aux frontières du domaine fluide. On impose dans ce cadre des conditions aux limites sur la température, au contraire de la Terre où, du point de vue du noyau liquide, on imagine plutôt des condition de flux de chaleur. On oublie alors la chaleur latente de cristallisation à la graine. Celle-ci impliquerait aussi un flux d'éléments légers dans le cas de la convection compositionnelle. Il faudrait alors considérer les changements de phase ou encore les équations d'advection-diffusion de ces éléments légers. On négligera les sources internes de chaleur comme la radioactivité (généralement représentée par une distribution uniforme de sources S), l'élévation de température par dissipation visqueuse, l'effet Joule... Finalement l'équation de l'énergie s'écrit (voir par exemple Tritton [1988] pour plus de détails)

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{Q}$$

où \mathbf{Q} est le flux de chaleur décrit par la loi de Fourier

$$\mathbf{Q} = -k \nabla T$$

et $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ l'opérateur de dérivée totale. NB: k est généralement une fonction de la température, ce que l'on néglige dans cette étude. On obtient alors

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T \quad (1.8)$$

où $\kappa = \frac{k}{\rho C_p}$ est la diffusivité thermique.

1.3 L'équation de la quantité de mouvement

1.3.1 Passage dans le référentiel en rotation

On considère ici un référentiel galiléen \mathcal{G} , et un référentiel \mathcal{T} tournant autour d'un axe \mathbf{e}_z fixe dans \mathcal{G} à une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ (i.e. on exclut par là les phénomènes de précession, nutations...). Si l'on note \mathbf{r} le rayon vecteur dans \mathcal{G} , on peut relier ainsi la vitesse et l'accélération du fluide dans les deux référentiels:

$$(\mathbf{u})_{\mathcal{G}} = (\mathbf{u})_{\mathcal{T}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{\mathcal{G}} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{\mathcal{T}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u})_{\mathcal{T}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u})_{\mathcal{T}}$$

Nous considérerons un fluide de Boussinesq, pour lequel l'équation de continuité (conservation de la masse) s'exprime de la même manière que pour un fluide incompressible:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.9)$$

Les équations de quantité de mouvement (dites de Navier-Stokes), s'écrivent dans le référentiel galiléen \mathcal{G}

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{\mathcal{G}} = -\frac{1}{\rho}\nabla\Pi + \frac{1}{\rho}\mathcal{F}_{\mathbf{v}} + \nu\nabla^2(\mathbf{u})_{\mathcal{G}}$$

avec Π la pression et $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}$ les forces de volume (autres que visqueuses). Le passage au référentiel en rotation entraîne alors

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{\mathcal{T}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u})_{\mathcal{T}} = -\nabla\Pi' + \frac{1}{\rho}\mathcal{F}_{\mathbf{v}} + \nu\nabla^2(\mathbf{u})_{\mathcal{T}}$$

avec $\Pi' = \frac{\Pi}{\rho} + \frac{1}{2}\Omega^2 s^2$ le champ de pression modifiée et $s = |\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}|$. Nous nous placerons dorénavant dans le référentiel en rotation, et on note $\mathbf{u} = (\mathbf{u})_{\mathcal{T}}$. Dans le cadre des hypothèses présentées dans la section 1.2, les forces de volume en convection se résument à la force d'Archimède $\mathcal{F}_{\mathbf{A}}$. Si on ajoute un champ magnétique on doit aussi considérer la force de Lorentz $\mathcal{F}_{\mathbf{L}}$.

1.3.2 Expression des forces de volume

La force d'Archimède

On notera T_0 une température de référence pour laquelle la densité vaut $\rho(T_0) = \rho_0$. Pour un fluide de Boussinesq, la compressibilité du fluide n'apparaît qu'à travers la force d'Archimède, et on écrit

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)]$$

avec α le coefficient d'expansion thermique à la température T_0 . Alors la force d'Archimède s'écrit

$$\mathcal{F}_{\mathbf{A}} = (\rho - \rho_0)\mathbf{g} = -\alpha\rho_0\mathbf{g}(T - T_0)$$

où \mathbf{g} est le champ de gravité. Dans le cas des corps sphériques et homogènes, ce champ est radial, avec une dépendance linéaire en r : $\mathbf{g} = g(r)\mathbf{e}_r$ avec

$$\frac{dg}{dr} = \gamma$$

La force de Lorentz

Lorsque l'on ajoute la composante magnétique du problème, on doit considérer la force de Lorentz associée à la présence de champs magnétique \mathbf{B} et électrique \mathbf{E} dans le référentiel tournant:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{L}} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.10)$$

Dans le cadre de notre étude, où $(u/c)^2 \ll 1$, on peut négliger la force électrique devant la force magnétique. En injectant la loi d'Ampère (1.6) dans (1.10) la force de Lorentz s'écrit

$$\mathcal{F}_{\mathbf{L}} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (1.11)$$

Finalement l'équation de quantité de mouvement pour le fluide dans le référentiel en rotation \mathcal{T} s'écrit

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi' - \alpha \mathbf{g} (T - T_0) + \frac{1}{\rho \mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.12)$$

Chapitre 2

Formulation du problème quasi-géostrophique

2.1 Le problème dynamique

Le premier impact de la rotation sur les équations de Navier-Stokes est de les rendre contre-intuitives. Les dimensionnements habituels n'y sont plus valables car la rotation finit par tout dominer (sauf bien sûr le gradient de pression). Nous cherchons ici à estimer quels ingrédients vont ressortir de notre problème, à quel ordre et sous quelles hypothèses. Nous utiliserons un référentiel soit sphérique ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$) soit cylindrique ($\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$), pour décrire la convection d'un fluide dans l'approximation de Boussinesq entre deux sphères de température T_e et T_i , et de rayons r_e et r_i (voir la figure 2.1). On développe dans cette partie la réduction du problème sphérique et tridimensionnel (non-magnétique) au modèle bidimensionnel Quasi-Géostrophique (QG) de convection dans une sphère en rotation rapide, en présence d'une gravité radiale linéaire comme celle présentée dans la partie 1.3.

Nous présentons ici l'approche QG du problème avec une approche perturbative. Ce type de modèles a tout d'abord été développé dans le cadre de couches minces (océan et atmosphère, voir Pedloski [1987]), et présente quelques caractéristiques particulières:

1. la composante "efficace" du vecteur rotation $\mathbf{\Omega}$ dans l'expression de la force de Coriolis est sa projection le long de \mathbf{e}_r (θ est la colatitude):

$$\Omega_{eff} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e}_r = \Omega \cos \theta$$

2. la pente ε des interfaces (topographie, variation de l'épaisseur des couches fluides) reste faible: $\varepsilon \ll 1$. Cette hypothèse est associée à la présence d'un champ de vitesses quasi-horizontal. Comme nous le verrons par la suite, ce petit paramètre ε est alors une mesure du rapport entre le temps caractéristique de la dynamique L/U et le

temps lié à la rotation Ω^{-1} :

$$\varepsilon \sim Ro = \frac{U}{L\Omega} \ll 1$$

où Ro est appelé le nombre de Rossby (L et U sont des mesures des tailles et vitesses caractéristiques).

Notre étude, à la manière de Busse [1970], utilise cette approche perturbative dans le cadre des fluides en couches profondes: le développement, a priori valable pour $\varepsilon \ll 1$, est étendu dans le cas où la pente des interfaces devient grande, afin de couvrir l'ensemble du volume de la sphère.

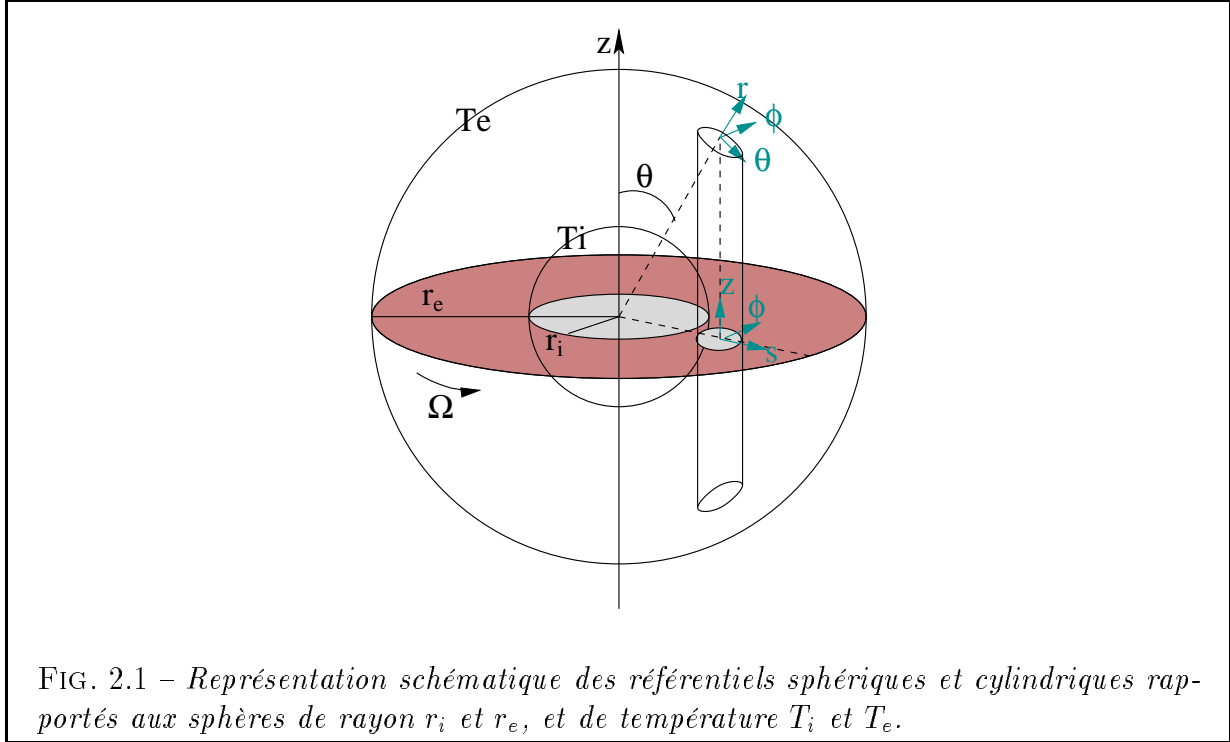


FIG. 2.1 – Représentation schématique des référentiels sphériques et cylindriques rapportés aux sphères de rayon r_i et r_e , et de température T_i et T_e .

2.1.1 L'équilibre géostrophique

Si l'on part de l'équation de Navier-Stokes (1.12) et que l'on suppose que la rotation est la force dominante du système, alors on peut déjà noter une dissymétrie entre la composante "équatoriale" \mathbf{u}_e et la composante "verticale" u_z de la vitesse. L'équilibre à l'ordre 0 qui gouverne notre système est l'équilibre géostrophique entre gradient de pression et force de Coriolis:

$$2\Omega \times \mathbf{u}^0 = -\nabla \Pi^0 \quad (2.1)$$

avec \mathbf{u}^0 les mouvements dits géostrophiques, et Π^0 le champ de pression modifiée associé. On a alors

$$\frac{\partial \Pi^0}{\partial z} = 0$$

si bien que les vitesses équatoriales \mathbf{u}_e^0 sont indépendantes de z , avec

$$\mathbf{u}_e^0 = \frac{1}{2\Omega} \mathbf{e}_z \times \nabla \Pi^0$$

2.1.2 Conservation de la masse

Nous partons de l'équation de continuité (1.9). A l'ordre 0 la divergence horizontale des vitesses \mathbf{u}^0 est nulle

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s u_s^0) + \frac{1}{s} \frac{\partial u_\phi^0}{\partial \phi} = 0 \quad (2.2)$$

L'équation (2.2) nous permet alors de décrire les vitesses convectives à l'aide d'une fonction courant ψ :

$$\begin{cases} u_s^0 = \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ u_\phi^0 = -\frac{\partial \psi}{\partial s} \end{cases} \quad (2.3)$$

C'est ce que nous avons adopté dans notre code numérique (cf le paragraphe 2.3.3). Concernant les vitesses verticales, on peut alors écrire à l'ordre 0

$$\frac{\partial u_z^0}{\partial z} = 0$$

Par ailleurs nous verrons dans le paragraphe 2.3.2 que les conditions aux limites sont antisymétriques en z . Il en résulte à l'ordre 0

$$u_z^0 = 0$$

La condition de non-pénétration $\mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{n}$ ne peut donc pas être satisfaite exactement, avec

$$\mathbf{n}_{|\pm H} = \frac{1}{r_e} \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ \pm H \end{pmatrix}$$

la normale à la paroi orientée vers l'extérieur. Cependant cette condition sera d'autant moins violée que la pente $\eta = \left| \frac{dH}{ds} \right| = \frac{s}{H}$ est petite, avec $H = \sqrt{s_e^2 - s^2}$ la demi-hauteur

d'une colonne fluide. On voit tout de suite une limite de notre approche: lorsque l'on s'approche de l'équateur, la pente augmente fortement et l'équilibre géostrophique ne peut plus définir l'ordre 0 des vitesses.

En retranchant (2.2) de (1.9) on obtient l'équation de continuité à l'ordre 1, qui s'écrit

$$\nabla_e \cdot \mathbf{u}^1 + \frac{\partial u_z^1}{\partial z} = 0. \quad (2.4)$$

avec $\nabla_e \cdot \mathbf{u}^1 = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s u_s^1) + \frac{1}{s} \frac{\partial u_\phi^1}{\partial \phi}$.

2.1.3 Equation de quantité de mouvement à l'ordre 1

Nous séparons ici

$$\mathbf{u}(s, \phi, z, t) = \mathbf{u}^0(s, \phi, t) + \mathbf{u}^1(s, \phi, z, t)$$

$$\Pi'(s, \phi, z, t) = \Pi'^0(s, \phi, t) + \Pi'^1(s, \phi, z, t)$$

où \mathbf{u}^1 est la composante agéostrophique du champ de vitesse (avec $u^1/u^0 \ll 1$) et Π'^1 la composante agéostrophique du champ de pression. Ce type de description a été d'abord développé dans le cadre de l'océanographie et la météorologie, où la pente des interfaces est généralement faible. Tout au long de ce développement nous allons supposer

$$\eta \ll 1$$

Cette hypothèse, évidemment fautive près de l'équateur, a néanmoins permis d'obtenir des résultats satisfaisants (voir Yano [1992], Cardin and Olson [1994], Aubert et al. [2003], Morin and Dormy [2004]), pour des problèmes linéaires et non-linéaires dans une couronne sphérique.

Revenons à l'équation de quantité de mouvement (1.12). A l'ordre 0 cette équation revient à l'équilibre géostrophique. Cet équilibre est dégénéré, et (2.1) est une équation dite diagnostique. On doit donc aller chercher dans l'équation de quantité de mouvement les termes d'ordre supérieur pour obtenir une expression pronostique pour les mouvements \mathbf{u}^0 . On note par la suite ε l'ordre de grandeur des petits paramètres, quels qu'ils soient (η , etc.).

Au premier ordre en ε , l'opérateur de dérivée totale $\frac{d}{dt}$ s'écrit alors

$$\frac{d_0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_e^0 \cdot \nabla_e)$$

L'équation de quantité de mouvement, projetée d'une part sur le plan équatorial et d'autre part suivant l'axe de rotation, s'écrit alors à l'ordre ε

$$\begin{aligned} \frac{d_0}{dt} \mathbf{u}_e^0 + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_e^1 &= -\nabla_e \Pi^1 - \alpha (T - T_0) g_e \mathbf{e}_s + \nu \nabla_e^2 \mathbf{u}_e^0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \Pi^1 &= -\alpha (T - T_0) g_z \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec ∇_e la composante équatoriale de l'opérateur gradient, la gravité

$$\begin{cases} g_e = \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_s = \gamma s \\ g_z = \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_z = \gamma z \end{cases}$$

décomposée dans le référentiel cylindrique, et les opérateurs laplacien

$$\begin{cases} \mathbf{e}_s \cdot \nabla_e^2 \mathbf{u}_e = \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s u_s) \right] + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial \phi^2} - \frac{2}{s^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ \mathbf{e}_\phi \cdot \nabla_e^2 \mathbf{u}_e = \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s u_\phi) \right] + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{s^2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \end{cases}$$

pour lesquels on néglige les dérivées en z puisque \mathbf{u}^0 est géostrophique. On note L et U les ordres de grandeur respectifs de la taille horizontale des structures et des vitesses. Le fait que l'on considère (2.5) comme étant l'équation des mouvements à l'ordre ε implique que le temps caractéristique L/U lié au terme d'inertie est semblable au temps Ω^{-1} lié à la force de Coriolis. Ceci nous donne alors l'ordre de grandeur du rapport u^1/u^0 :

$$\frac{u^1}{u^0} \sim O(Ro)$$

avec

$$Ro = \frac{U}{\Omega L}$$

le nombre de Rossby. Ce nombre est alors une mesure du petit paramètre $\varepsilon \sim \eta \sim Ro$. Nous verrons dans le chapitre 1.1.2 de la partie II que la convection thermique en rotation rapide impose dans ce cadre la taille L caractéristique de la structure horizontale des écoulements; en particulier nous verrons que

$$\frac{L}{H} \ll 1$$

Dans le cas où le terme d'inertie est dominé par des mouvements rapides de période caractéristique τ , ce nombre s'écrit $Ro = \frac{1}{\tau \Omega}$. Pour que le nombre de Rossby soit petit devant 1, il faut donc que la dynamique soit lente devant la période de rotation (ce qui filtre les ondes d'inertie-gravité présentes dans les milieux à stratification instable).

2.1.4 L'équation de vorticité

Pour évaluer l'expression associée aux mouvements agéostrophiques dans (2.5), il est pratique de raisonner à partir de la vorticité

$$\zeta = \nabla_{\times} \mathbf{u}$$

Si l'on suppose $\varepsilon \ll 1$ alors la composante majeure de la vorticité à l'ordre 0 est verticale, et s'écrit

$$\zeta_z^0(s, \phi, t) = \mathbf{e}_z \cdot \nabla_{\times} \mathbf{u}^0$$

En prenant la composante verticale du rotationnel de (2.5) on obtient l'équation suivante

$$\frac{d_0 \zeta_z^0}{dt} - \zeta_z^0 \frac{\partial u_z^1}{\partial z} + 2\Omega \nabla_e \cdot \mathbf{u}^1 = \alpha \gamma \frac{\partial T}{\partial \phi} + \nu \Delta_e \zeta_z^0 \quad (2.6)$$

avec $\Delta_e = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$, où l'on néglige le terme $u_z^1 \frac{\partial^2 \zeta_z^1}{\partial z^2}$. En introduisant l'équation de continuité (2.4) dans l'équation de vorticité (2.6) on obtient

$$\frac{d_0 \zeta_z^0}{dt} - (2\Omega + \zeta_z^0) \frac{\partial u_z^1}{\partial z} = \alpha \gamma \frac{\partial T}{\partial \phi} + \nu \Delta_e \zeta_z^0 \quad (2.7)$$

On peut noter dans cette équation que l'hypothèse $Ro \ll 1$ nous permet de négliger la vorticité relative ζ_z^0 devant la vorticité planétaire 2Ω . Ensuite pour connaître l'effet associé aux vitesses verticales il est pratique d'intégrer l'équation (2.7) sur la verticale. Cela demande une petite attention: cette intégration est possible uniquement **si l'on prend soin de rester en dehors des couches limites visqueuses**. En effet le développement suivi pour aboutir à l'équation de la vorticité suppose que les variations verticales des vitesses sont négligeables, ce qui n'est plus vrai dans les couches limites, comme nous allons le voir dans la section 2.3.2. Si l'on note δ_ε l'épaisseur de ces couches limites visqueuses, alors on obtient à partir de l'équation (2.7)

$$\frac{d_0 \zeta_z^0}{dt} - \frac{\Omega}{H} \left[u_z^1 \right]_{-H+\delta_\varepsilon}^{H-\delta_\varepsilon} = \alpha \gamma \frac{\partial \langle T \rangle_z}{\partial \phi} + \nu \Delta_e \zeta_z^0 \quad (2.8)$$

avec

$$\langle (\dots) \rangle_z = \frac{1}{2H} \int_{-H+\delta_\varepsilon}^{H-\delta_\varepsilon} (\dots) dz$$

NB: nous négligeons ici l'épaisseur des couches limites devant la hauteur des colonnes fluides: $\delta_\varepsilon \ll H$. Ceci sera justifié plus loin (cf le paragraphe 2.3.2).

correction des vitesses géostrophiques à l'ordre η

Si maintenant on suppose faibles les sources de cisaillement vertical des vitesses équatoriales (paragraphe 2.2.1), alors l'équation (2.5) projetée selon z devient

$$\frac{\partial \Pi^1}{\partial z} = 0.$$

et l'équation (2.5) projetée dans le plan de l'équateur implique

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e^1}{\partial z} = 0.$$

Alors on peut écrire à partir de l'équation (2.4)

$$\frac{\partial^2 u_z^1}{\partial z^2} = 0.$$

c'est à dire que le profil de vitesse verticale est linéaire en z ! Si l'on néglige les frictions aux frontières, la condition aux limites (2.23) nous amène à

$$u_z^1(s, \phi, z, t) = -\eta \frac{z}{H} u_s^0(s, \phi, t) \quad (2.9)$$

Schaeffer and Cardin [2004b] ont montré qu'il est alors possible d'intégrer l'effet des mouvements verticaux (2.9) tout en conservant une description des mouvements de type quasi-géostrophique et une fonction courant. En effet en intégrant en z l'équation de conservation de la masse (1.9) on obtient

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s u_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \left\langle \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\rangle_z = 0.$$

Si l'on considère maintenant le profil de vitesse verticale (2.9), linéaire en z au premier ordre, l'équation de continuité s'écrit

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s u_s^0) + \frac{1}{s} \frac{\partial u_\phi^0}{\partial \phi} = -\frac{\eta}{H} u_s^0 \quad (2.10)$$

C'est ce qu'ont noté Schaeffer and Cardin [2004b], qui se sont également appuyés sur l'approximation QG pour leur étude de la dynamique d'une cavité fluide contenue entre deux sphères en rotation différentielle. Ils décrivent alors les vitesses équatoriales et la vorticité ainsi:

$$\begin{aligned} u_s^0 &= \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ u_\phi^0 &= -\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\eta}{H} \psi \end{aligned}$$

D'après leurs calculs, cela ne change pas drastiquement la structure des écoulements obtenus, même loin de la surface cylindrique tangente à la sphère interne (le cylindre tangent) où l'essentiel de l'énergie est injectée. Nous n'avons pas introduit cette modification de la description des vitesses géostrophiques dans notre modélisation.

Concernant le problème linéaire, les résultats de l'approche QG, par Yano [1992], sont en bon accord avec l'approche de Jones et al. [2000], qui prend en compte les vitesses verticales $u_z(s, \phi, z, t)$. Il serait intéressant de savoir si la modification proposée par Schaeffer and Cardin [2004b] permet d'avoir des résultats QG encore plus pertinents. Il est par ailleurs intéressant de remarquer que la structure 2D des écoulements a été qualitativement observée dans des expériences de convection en eau dans une sphère (voir Cardin and Olson [1992]), même dans les régions les plus éloignées de l'axe de rotation, là où la pente de la frontière varie très vite.

2.2 Le problème thermique

Le problème dynamique décrit dans la section précédente 2.1 est couplé au problème thermique décrit par l'équation (1.8). Deux questions se posent à ce stade. On peut tout d'abord se demander dans quelle mesure il est possible de décrire des mouvements convectifs dans le cadre de l'approche QG. Autrement dit: est-il sensé de supposer que les mouvements sont z-invariants à l'ordre 0 quel que soit le forçage? Après avoir présenté ces limites, nous tenterons de voir de quelle manière il est possible d'intégrer les particularités des vitesses géostrophiques dans l'équation de la chaleur. Nous définissons tout d'abord le champ 3D de température statique T_s^{3D} solution de l'équation de Laplace $\Delta T = 0$ et satisfaisant aux conditions aux limites $T_s^{3D}(r_i) = T_i$ et $T_s^{3D}(r_e) = T_e$. Ce profil vaut

$$T_s^{3D}(r) = T_0 - \frac{\Delta T}{d} \frac{r_e r_i}{r}$$

avec $\Delta T = T_e - T_i$, $d = r_e - r_i$, et la température de référence

$$T_0 = \frac{r_e T_e - r_i T_i}{d}$$

A partir de là nous dissocions le champ de température T de la façon suivante:

$$T(s, \phi, z, t) = T_s^{3D}(s, \phi, z) + \Theta(s, \phi, z, t) \quad (2.11)$$

où Θ est la perturbation par rapport au champ de température statique.

2.2.1 Cisaillement vertical et vent thermique

Une façon de répondre à la première interrogation consiste à mesurer l'importance du cisaillement vertical des vitesses équatoriales dans le système (2.5). Celui-ci n'intervient que

dans le terme issu de la force de Coriolis, la force d'Archimède (car le champ de température n'a aucune raison d'être invariant en z) et le gradient de pression agéostrophique. En combinant la composante verticale de (2.5) avec la dérivée de sa composante équatoriale selon z , on obtient l'équation du vent thermique:

$$2\mathbf{\Omega} \times \frac{\partial \mathbf{u}_e^1}{\partial z} = -\alpha\gamma \left[s \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{e}_s - z \nabla_e T \right] \quad (2.12)$$

Le vent thermique résulte en fait de l'écart entre les isogravités et les isodensités (ici les isothermes). Dans le cas étudié ici (la convection entre deux sphères) il se trouve que le champ de température statique T_s^{3D} , comme le champ de gravité, a une structure sphérique. Dès lors, la source thermique de cisaillement vertical provient uniquement de l'écart Θ au profil statique.

$$2\mathbf{\Omega} \times \frac{\partial \mathbf{u}_e^1}{\partial z} = -\alpha\gamma \left[s \frac{\partial \Theta}{\partial z} \mathbf{e}_s - z \nabla_e \Theta \right]$$

A partir de considérations sur le flux de chaleur et de l'estimation des vitesses dans les noyaux planétaires, on considère généralement que le profil de température ne s'éloigne pas beaucoup de l'adiabat dans les planètes (voir la partie 1.2.2 de l'introduction générale). Nous négligerons donc le vent thermique dans notre modélisation QG. Nous reviendrons tout de même sur cette question dans la description de l'expérience, où le problème n'est pas tout à fait le même puisque l'on utilise une gravité centrifuge.

2.2.2 L'équation de la chaleur

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où l'on néglige le cisaillement vertical des vitesses horizontales. Compte tenu de la description (2.11) du champ de température, on peut mettre l'équation de la chaleur sous la forme

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla_e - \kappa \Delta_e \right] \Theta + u_s \frac{\partial T_s^{3D}}{\partial s} = -u_z \frac{\partial T}{\partial z} + \kappa \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Theta \quad (2.13)$$

Le membre de droite de cette équation contient les effets d'advection et de diffusion de chaleur le long de l'axe de rotation. La moyenne en z de cette équation nous donne alors, au premier ordre en ε ,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e^0 \cdot \nabla_e \right] \langle \Theta \rangle_z + u_s^0 \frac{\partial}{\partial s} \langle T_s^{3D} \rangle_z - \kappa \Delta_e \langle \Theta \rangle_z = - \left\langle u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle_z + \frac{1}{2H} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right]_{-H+\delta_\varepsilon}^{+H-\delta_\varepsilon}$$

avec

$$\langle T_s^{3D} \rangle_z = T_0 - \Delta T \frac{r_e r_i}{H(s)d} \operatorname{arcsch} \left(\frac{H}{s} \right)$$

Il aurait alors été possible de prendre en compte analytiquement le terme d'advection verticale de chaleur en considérant le profil de vitesse verticale (2.9). En effet en intégrant par partie le premier terme du membre de droite on arrive à

$$\left\langle u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle_z = -\frac{\eta u_s^0}{H} [T_e - \langle T \rangle_z]$$

Considérons maintenant le terme de diffusion verticale de température. Dans le coeur du fluide, on peut l'estimer négligeable devant la diffusion équatoriale dans la mesure où $L/H \ll 1$ (voir le paragraphe 1.1.2, partie II). Par contre ceci n'est plus vrai en présence de couches limites thermiques près de la sphère extérieure. Pour prendre en compte ces processus verticaux il nous faudrait connaître l'allure de ces couches limites, et donc coupler un modèle de vitesse QG avec une description 3D du champ de température. Il serait intéressant de faire ce développement pour pouvoir estimer par exemple le flux de chaleur en fonction de la latitude.

Dans cette étude nous avons pris le parti de garder une vision du champ de température intégré sur la verticale $\langle T \rangle_z$. En négligeant le membre de droite de (2.13), on surestime en quelque sorte le flux de chaleur équatorial pour un forçage donné. Ce point constitue une limite à la comparaison directe de ce modèle de convection QG avec les expériences ou les noyaux planétaires, comme nous l'illustrerons dans le chapitre 3.2 de la partie II. Par souci de clarté nous noterons à partir de maintenant $\Theta = \langle \Theta \rangle_z$. L'équation de la chaleur à laquelle nous aboutissons est alors la suivante

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e^0 \cdot \nabla_e \right] \Theta + u_s^0 \frac{d}{ds} \langle T_s^{3D} \rangle_z = \kappa \Delta_e \Theta \quad (2.14)$$

Cependant le profil statique $\langle T_s^{3D} \rangle_z$ utilisé ici ne vérifie pas exactement l'équation de Laplace bi-dimensionnelle $\Delta_e T = 0$. Afin de s'affranchir de ce problème, nous avons choisi d'utiliser le profil T_s^{2D} solution de cette équation et vérifiant les conditions aux limites suivantes (voir Aubert et al. [2003]):

$$T_s^{2D}(s_i) = \langle T_s^{3D} \rangle_z(s_i) \quad \text{et} \quad T_s^{2D}(s_e) = T_e$$

Ce profil vaut

$$T_s^{2D}(s) = \langle T_s^{3D} \rangle_z(s_i) + \Delta T^{2D} \frac{\ln\left(\frac{s}{s_i}\right)}{\ln\left(\frac{s_e}{s_i}\right)} \quad (2.15)$$

avec

$$\Delta T^{2D} = \Delta T \frac{s_i}{d} \left[\frac{s_e}{H(s_i)} \operatorname{arcsch}\left(\frac{H(s_i)}{s_i}\right) - 1 \right]$$

Tout au long de cette étude (expérimentale et numérique) le rapport d'aspect utilisé vaut $s_i/s_e = 4/11$, ce qui donne $\Delta T^{2D} = \Delta T/2.208$. On pourra remarquer sur la figure 2.2 que les profils statiques $\langle T_s^{3D} \rangle_z$ et T_s^{2D} présentent des allures tout à fait comparables. Par souci de clarté nous noterons par la suite $T_s = T_s^{2D}$.

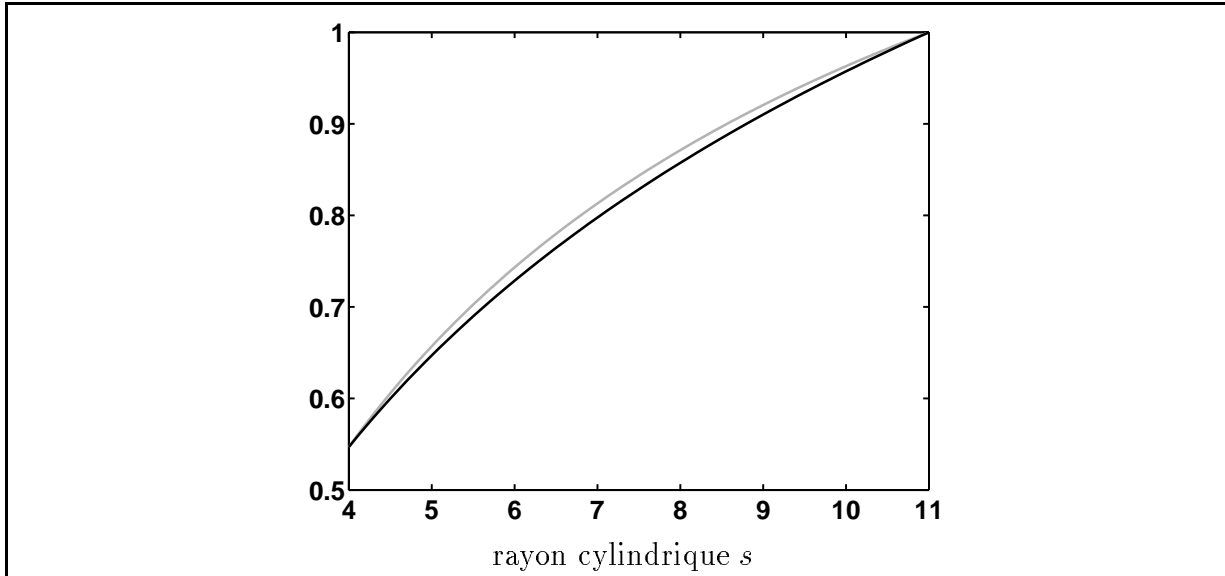


FIG. 2.2 – *Profils de température statique (normés par rapport à ΔT) pour $s_i/s_e = 4/11$: $\langle T_s^{3D} \rangle_z$ (gris) et T_s^{2D} (noir).*

2.2.3 Flux de chaleur et nombre de Nusselt

Avant d'aller plus loin il paraît intéressant de dire quelques mots sur l'estimation du flux de chaleur dans notre modèle. Pour obtenir le flux de chaleur intégré on sépare l'écart Θ au profil de température statique entre sa composante axisymétrique $\overline{\Theta}$ et les fluctuations $\hat{\Theta}$

$$\Theta(s, \phi, t) = \overline{\Theta}(s, t) + \hat{\Theta}(s, \phi, t)$$

avec

$$\overline{(\dots)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\phi$$

et $\overline{\hat{\Theta}} = 0$. A l'ordre 0 le champ de vitesse horizontale est non-divergent, et la moyenne azimutale de (2.14) donne alors

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial}{\partial s} \right) \right] \overline{\Theta} = -\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \overline{u_s^0 \hat{\Theta}} \right)$$

Si l'on considère que la convection est stationnaire, i.e. on néglige les fluctuations temporelles du flux de chaleur, on peut intégrer entre s_i et s , pour obtenir

$$\left[s \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial s} \right]_{s_i}^s = \left[s \cdot \overline{u_s^0 \hat{\Theta}} \right]_{s_i}^s$$

NB: cette hypothèse de stationnarité serait à revoir dans les cas de convection intermittente présente proche du seuil lorsque la diffusivité thermique est très forte, comme dans les métaux liquides - et donc dans le cadre de la magnéto-convection en général. Le chapitre 2.3.2 de la partie II propose une description plus détaillée de ce phénomène. Comme $u_s(s_i) = 0$ on arrive à

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial s}|_{s_i} = \frac{s}{s_i} \left[\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial s} - \overline{u_s^0 \hat{\Theta}} \right] \quad (2.16)$$

On peut voir apparaître ici le nombre de Nusselt, rapport entre la chaleur évacuée en régime convectif (conduite le long du profil de température moyen $\bar{T} = T_s + \bar{\Theta}$ et advectée par les mouvements) et la chaleur conduite le long du profil statique. Dans le cas décrit ici, où il n'y a pas de flux de chaleur vertical, le nombre de Nusselt est indépendant de s . On peut alors l'estimer en s_i , où les vitesses sont nulles, de la manière suivante

$$Nu - 1 = \frac{\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial s} - \overline{u_s^0 \hat{\Theta}}}{\frac{dT_s}{ds}} = \frac{\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial s}|_{s_i}}{\frac{dT_s}{ds}|_{s_i}} \quad (2.17)$$

Remarquons que les équations (2.16) et (2.17) sont rigoureusement équivalentes puisque que le profil statique T_s défini par (2.15) vérifie

$$\frac{dT_s}{ds} = \frac{s_i}{s} \frac{dT_s}{ds}|_{s_i}$$

2.3 Description du modèle de convection QG

2.3.1 Adimensionnement des équations

On utilise l'écart entre les deux sphères $d = r_e - r_i$ comme unité de longueur, le temps de diffusion thermique d^2/κ comme unité de temps, et le saut de température $\Delta T = T_e - T_i$ comme unité de température. Le choix du temps thermique, plutôt que du temps visqueux comme c'est souvent le cas dans ce type d'étude, sera justifié dans le cadre de la magnéto-convection. On obtient alors à partir de (2.8) et (2.14) les équations adimensionnées

$$\frac{1}{P} \frac{d_0 \zeta_z^0}{dt} - \frac{E^{-1}}{H} \left[u_z^1 \right]_{-H+\delta_\varepsilon}^{H-\delta_\varepsilon} = R \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} + \Delta_\varepsilon \zeta_z^0 \quad (2.18)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e^0 \cdot \nabla_\varepsilon \right] \Theta + u_s^0 \frac{dT_s}{ds} = \Delta_\varepsilon \Theta \quad (2.19)$$

où l'on trouve le nombre de Rayleigh

$$R = \frac{\alpha \gamma \Delta T d^4}{\kappa \nu}$$

rapport entre le forçage thermique et les dissipations dans le volume (visqueuse et thermique), le nombre d'Ekman

$$E = \frac{\nu}{\Omega d^2}$$

rapport entre le temps de rotation Ω^{-1} et le temps visqueux d^2/ν , et le nombre de Prandtl

$$P = \frac{\nu}{\kappa}$$

rapport entre le temps visqueux et le temps thermique. Soulignons ici que c'est la composante équatoriale du champ de gravité $g_s = \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_s$ qui intervient dans l'équation de vorticité. Or celle-ci est linéaire en s , ce qui est aussi le cas de la gravité centrifuge des expériences (voir la section 3.1)! Les  quations QG, dérivées ici dans le cas de deux sphères en présence de gravité radiale, sont alors adaptées pour décrire la modélisation expérimentale.

2.3.2 Expression des conditions aux limites

Vitesses convectives et vent zonal

On pourra remarquer qu'en termes de vitesses, la solution de l'équation de vorticité (2.18) est définie à un gradient près (Plaut and Busse [2002]). Ce dernier correspond en fait à un mouvement axisymétrique. Par ailleurs nous avons vu que le champ de vitesse géostrophique est à divergence nulle. Il en résulte que la composante axisymétrique $\overline{\mathbf{u}}^0$ des vitesses géostrophiques est entièrement ortho-radiale, i.e. $\overline{u}_s^0 = 0$. Nous séparons alors les mouvements axisymétriques \overline{u}_ϕ^0 (le vent zonal) des mouvements non-axisymétriques u_s^0 et u_ϕ^0 (mouvements "convectifs"):

$$\mathbf{u}_e^0(s, \phi, t) = u_s^0(s, \phi, t) \cdot \mathbf{e}_s + \left[u_\phi^0(s, \phi, t) + \overline{u}_\phi^0(s, t) \right] \cdot \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{u}_e^0(s, \phi, t) = \mathbf{u}_c^0(s, \phi, t) + \overline{u}_\phi^0(s, t) \mathbf{e}_\phi$$

On sépare aussi les fluctuations de vorticité, issues des mouvements convectifs, de la partie moyenne issue du vent zonal:

$$\zeta^0(s, \phi, t) = \zeta_c^0(s, \phi, t) + \overline{\zeta}^0(s, t)$$

avec $\overline{\zeta_c^0} = 0$. Pour lever l'indétermination de (2.18), nous décrirons donc le vent zonal à part, via l'équation de quantité de mouvement. Les vitesses convectives seront quand à elles décrites à travers l'équation de vorticité.

1.   quation de vorticité des mouvements convectifs:

Pour obtenir l'équation de vorticité pour les mouvements convectifs, il nous faut isoler la composante axisymétrique (2.18)

$$\frac{1}{P} \left[\frac{\partial \overline{\zeta^0}}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}_c^0} \cdot \nabla_\epsilon \zeta_c^0 \right] - \frac{E^{-1}}{H} \left[\overline{u_z^1} \right]_{-H+\delta_\epsilon}^{H-\delta_\epsilon} = \Delta_\epsilon \overline{\zeta^0}$$

On notera que la force d'Archimède n'est pas présente dans l'équation de la vorticité axisymétrique. En retranchant cette équation de (2.18), on obtient l'équation de vorticité associée aux mouvements convectifs

$$\frac{1}{P} \left[\frac{\partial \zeta_c^0}{\partial t} + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla_\epsilon \zeta_c^0 - \overline{\mathbf{u}_c^0} \cdot \nabla_\epsilon \zeta_c^0 \right] - \frac{E^{-1}}{H} \left[u_z^1 - \overline{u_z^1} \right]_{-H+\delta_\epsilon}^{H-\delta_\epsilon} = R \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} + \Delta_\epsilon \zeta_c^0 \quad (2.20)$$

NB: La vorticité $\overline{\zeta^0}$ est toujours présente dans le tenseur de Reynolds par couplage non-linéaire des mouvements convectifs et du vent zonal.

2.   quation de quantité de mouvement du vent zonal:

Pour décrire l'évolution du vent zonal, on revient à l'équation de quantité de mouvement (2.5) au premier ordre en ϵ , que l'on projette suivant \mathbf{e}_ϕ . La force d'Archimède n'ayant pas de composante dans cette direction, elle n'apparaîtra donc pas. Comme précédemment on intègre sur la verticale, puis on extrait la partie axisymétrique. Cette dernière étape fait disparaître intégralement le gradient de pression. Après adimensionnement on aboutit finalement à

$$\frac{1}{P} \left[\frac{\partial \overline{u_\phi^0}}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}_c^0} \cdot \nabla_\epsilon u_\phi^0 + \frac{\overline{u_s^0 u_\phi^0}}{s} \right] + \frac{2}{E} \left\langle \left(\mathbf{e}_z \times \overline{\mathbf{u}^1} \right) \cdot \mathbf{e}_\phi \right\rangle_z = \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \overline{u_\phi^0} \right) \right] \quad (2.21)$$

Le système résolu par notre code de convection QG se compose alors des trois équations (2.19 - 2.20 - 2.21). Nous avons maintenant besoin de connaître la vitesse verticale en sortie des couches limites visqueuses, et pour cela d'exprimer complètement les conditions aux limites.

Couches limites et pompage d'Ekman

En toute rigueur nous devrions imposer une condition aux limites de non-glissement

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

aux frontières du domaine, mais nous ne r  solons pas les couches limites. Or les vitesses géostrophiques dont on veut décrire l'évolution ne peuvent satisfaire cette condition. Notre

description n'est donc valable qu'en dehors des couches limites visqueuses. Pour les fluides en rotation, le raccordement des vitesses géostrophiques à la condition aux parois se fait par l'intermédiaire de couches dites d'Ekman, dans lesquelles les forces visqueuses s'ajoutent à la force Coriolis pour contre-balancer le gradient de pression:

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

On peut montrer (voir par exemple Pedloski [1987]) que ces couches sont d'épaisseur

$$\delta_\varepsilon \sim O\left(\frac{\nu}{\Omega}\right)^{1/2}$$

très petite devant la demi-hauteur H d'une colonne fluide. Par ailleurs la conservation de la masse dans la couche limite nécessite l'apparition d'un flux de fluide alimentant cette couche. On peut montrer (voir par exemple Gubbins and Roberts [1987]) que la condition aux limites en sortie des couches d'Ekman s'écrit

$$\{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\}_{|\pm(H-\delta_\varepsilon)} = w_{|\pm(H-\delta_\varepsilon)}$$

avec

$$w_{|\pm(H-\delta_\varepsilon)} = \frac{E^{1/2}}{2} \mathbf{n} \cdot \nabla_\times \left[\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{u}^0 \mp \mathbf{u}^0}{\sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z}} \right] \quad (2.22)$$

la vitesse pompée normale à la parois. Pour prendre en compte l'impact des couches d'Ekman, on doit considérer qu'il y a autant de fluide qui rentre que de fluide qui sort de ces couches, ce que l'on peut écrire

$$s \left[u_s^0 + u_s^1 \right]_{|\pm(H-\delta_\varepsilon)} \pm H u_z^1_{|\pm(H-\delta_\varepsilon)} = r_\varepsilon w_{|\pm(H-\delta_\varepsilon)} \quad (2.23)$$

On peut à ce stade du développement à nouveau séparer le cas du vent zonal des mouvements convectifs.

1. friction d'Ekman associée aux mouvements convectifs:

L'équation (2.20) des mouvements convectifs fait apparaître la vitesse $u_z^1 - \overline{u_z^1}_{|\pm(H-\delta_\varepsilon)}$. On peut, à partir de (2.23), obtenir la valeur de la vitesse verticale à introduire dans l'équation de vorticité (2.20). Nous avons vu auparavant que la vitesse géostrophique radiale $\overline{u_s^0}$ est nulle. Par ailleurs, on peut négliger u_s^1 devant u_s^0 au premier ordre en ε . La composante non-axisymétrique de (2.22) nous amène alors à écrire, au premier ordre en ε ,

$$\pm \left[u_z^1 - \overline{u_z^1} \right]_{|\pm(H-\delta_\varepsilon)} = \frac{E^{1/2}}{2} P_u(\mathbf{u}_c^0) - \eta u_s^0 \quad (2.24)$$

avec - voir Schaeffer and Cardin [2004b] -

$$P_u(\mathbf{u}) = \left(\frac{s_\varepsilon}{H} \right)^{3/2} \left[H\zeta + \frac{s}{2H} u_\phi - \frac{s}{H} \frac{\partial u_s}{\partial \phi} + \frac{5}{2} \frac{s_\varepsilon s}{H^2} u_s \right]$$

Le premier terme de (2.24), d'ordre $E^{1/2}$, correspond au pompage d'Ekman. Le second résulte d'un effet de topographie dû à la pente des frontières du domaine (effet β , voir le paragraphe 1.1.1 de la partie II). On peut remarquer que le pompage d'Ekman est relié à la vorticité de l'écoulement. En simplifiant, on peut dire qu'une colonne cyclonique ($\zeta > 0$) pompe du fluide des couches limites vers la colonne, quand un anticyclone ($\zeta < 0$) expulse du fluide de la colonne vers les couches limites. Le pompage d'Ekman, comme l'effet de topographie, entraîne des vitesses u_z antisymétriques en z . Alors l'équation de vorticité (2.20) devient

$$\frac{1}{P} \left[\frac{\partial \zeta_c^0}{\partial t} + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla_\epsilon \zeta^0 - \overline{\mathbf{u}_c^0 \cdot \nabla_\epsilon \zeta_c^0} \right] + \frac{2\eta E^{-1}}{H} u_s^0 + \frac{E^{-1/2}}{H} P_u(\mathbf{u}_c^0) = R \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} + \Delta_\epsilon \zeta_c^0 \quad (2.25)$$

Les résultats présentés dans Aubert et al. [2003] ne prenaient pas en compte le pompage d'Ekman pour l'équation de vorticité des mouvements convectifs (i.e. $P_u(u_c^0) = 0$). Nous l'avons réintégré, et présentons son impact spécifique dans la section II.1.2.

2. friction d'Ekman associée au vent zonal:

L'équation (2.21) du vent zonal fait apparaître le terme de Coriolis:

$$\left\langle (\mathbf{e}_z \times \overline{\mathbf{u}^1}) \cdot \mathbf{e}_\phi \right\rangle_z = \frac{1}{2H} \int_{-H+\delta_\epsilon}^{+H-\delta_\epsilon} \overline{u_s^1} dz$$

A l'ordre dominant l'incompressibilité du fluide impose $\overline{u_s^0} = 0$ (pas de source ni de puits de fluide). Il n'y a donc pas d'effet de topographie associé au vent zonal. Ceci peut se comprendre en considérant qu'un déplacement azimutal d'une colonne fluide n'engendre aucune modification de la hauteur de la colonne (cf le paragraphe 1.1.1 de la partie II). Par contre la composante axisymétrique $\overline{u_s^1}$ de la vitesse radiale est non-nulle, et l'on ne peut pas la négliger puisque sa prise en compte est une étape essentielle dans le calcul de la friction aux parois pour la composante axisymétrique. Nous pouvons rappeler dans ce cas particulier les grandes lignes du raisonnement qui donne l'expression du pompage d'Ekman pour l'équation (2.21). Les détails de se développement se trouvent dans Aubert [2001]. Partons de l'équation de conservation de la masse (1.9), que l'on peut écrire

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$$

avec S une surface fermée composée de deux cylindres de rayons s et s_i , et des deux calottes sphériques qu'ils délimitent (en restant à l'extérieur des couches d'Ekman). Si l'on néglige le flux de matière provenant de la couche limite parallèle en s_i , alors le flux à travers les cylindres s'écrit

$$2\pi s \int_{-H+\delta_\epsilon}^{+H-\delta_\epsilon} \overline{u_s^1} dz$$

ce que contrebalance le flux pompé à travers les deux calottes. Si l'on prend en compte l'invariance en z des vitesses équatoriales $\overline{u^0}$, on peut montrer que le flux de matière est le même à travers les deux calottes, ce qui amène à

$$\int_{-H+\delta_\epsilon}^{+H-\delta_\epsilon} \overline{u_s^1} dz = 2 \frac{r_e^2}{s} \int_{\theta(s_i)}^{\theta(s)} \overline{w}_{|H-\delta_\epsilon} \sin \theta d\theta$$

avec \overline{w} donné par la formule (2.22) appliquée à $\overline{\mathbf{u}^0} = \overline{u_\phi^0} \mathbf{e}_\phi$

$$\overline{w} = \frac{E^{1/2}}{2} \nabla_\times \left[\frac{\mathbf{n} \times \overline{\mathbf{u}^0} - \overline{\mathbf{u}^0}}{\sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z}} \right] \cdot \mathbf{n}$$

On arrive finalement à

$$\left\langle (\mathbf{e}_z \times \overline{\mathbf{u}^1}) \cdot \mathbf{e}_\phi \right\rangle_z = \frac{E^{1/2}}{2H \sqrt{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z|}} \overline{u_\phi}$$

En considérant que $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z| = \frac{H}{s_e}$ alors l'équation (2.21) du mouvement zonal devient

$$\frac{1}{P} \left[\frac{\partial \overline{u_\phi^0}}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}_c^0} \cdot \nabla_\epsilon \overline{u_\phi^0} + \frac{\overline{u_s^0 u_\phi^0}}{s} \right] + \frac{E^{-1/2}}{H} \sqrt{\frac{s_e}{H}} \overline{u_\phi^0} = \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \overline{u_\phi^0}) \right] \quad (2.26)$$

Une question est souvent passée sous silence lors de la description des couches d'Ekman. Est-il grave de ne pas considérer l'aspect temporel dans l'établissement des couches limites en rotation? En d'autres termes, doit-on attendre le temps d'ajustement visqueux pour que la vitesse w des couches limites se mettent en place lors du passage d'une colonne fluide? La réponse est non. En effet à l'échelle de temps de phénomènes étudiés, le pompage d'Ekman apparaît immédiatement, puisque c'est en fait un flux de matière entre les couches limites et le coeur du fluide nécessaire pour satisfaire à la conservation de la masse. Notons tout de même que la formule (2.22) n'est plus valable dans le cas de mouvements rapides par rapport au temps de rotation (par exemple les ondes d'inertie-gravité).

2.3.3 Implémentation numérique

On utilise une décomposition spectrale en ϕ pour décrire la fonction courant ψ et la perturbation de température Θ :

$$\begin{cases} \psi = \frac{1}{2} \sum_{m=-M}^{m=+M} \psi_{m \neq 0}(s, t) e^{-im\phi} \\ \Theta = \frac{1}{2} \sum_{m=-M}^{m=+M} \Theta_{m \neq 0}(s, t) e^{-im\phi} \end{cases} \quad (2.27)$$

avec $\psi_{-m} = \psi_m^*$ et $\psi_{-m}.\psi_m^* = |\psi_m|^2$. La dépendance radiale est traitée par différences finies. On doit imposer des conditions aux limites de non-glissement pour ψ_m en s_i et s_e :

$$u_s = u_\phi = 0. \Rightarrow \psi_m = \frac{d\psi_m}{ds} = 0.$$

en $s = s_i$ et $s = s_e$

Le vent zonal $\overline{u_\phi}$ est codé à part (en isolant le mode $m = 0$ des autres, on s'épargne une dérivée). La condition de non-glissement appliquée au vent zonal s'écrit

$$\overline{u_\phi}|_{s_i} = \overline{u_\phi}|_{s_e} = 0.$$

Par ailleurs on doit imposer les conditions aux limites suivantes à la température

$$\Theta_m|_{s_i} = \Theta_m|_{s_e} = 0.$$

Nous sommes alors amené à résoudre le système suivant pour les inconnues ψ , Θ et $\overline{u_\phi}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\epsilon \right] \Delta_\epsilon \psi + E^{-1/2} P_\psi(\psi) + \frac{2\eta}{EH} \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = -R \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} - \frac{1}{P} F(\psi, \overline{u_\phi}) \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\epsilon \right] \Theta = -\frac{1}{s} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \Theta - \frac{\Delta T^{2D}}{s^2 \Delta T \ln\left(\frac{s_e}{s_i}\right)} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ \left[\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\epsilon + \frac{1}{s^2} + \frac{E^{-1/2}}{H} \sqrt{\frac{s_e}{H}} \right] \overline{u_\phi} = \frac{1}{P} \frac{1}{s} \overline{\left[\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right]} \end{array} \right.$$

où les membres de gauche sont traités implicitement avec un schéma de Crank-Nicholson, et les membres de droite sont traités explicitement avec un schéma d'Adams-Bashforth. La fonction P_ψ décrit le pompage d'Ekman associé à la composante non-axisymétrique de la vortacité:

$$P_\psi(\psi) = \frac{1}{H} \left(\frac{s_e}{H} \right)^{3/2} \left[H \Delta_\epsilon \psi + \frac{s}{2H} \frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{m^2}{H} \psi - im \frac{5s_e}{2H^2} \psi \right]$$

La fonction F décrit le terme non-linéaire du tenseur de Reynolds:

$$F(\psi, \overline{u_\phi}) = \frac{1}{s} \left\{ \left[\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial s} + \left(\overline{u_\phi} - \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \Delta_\epsilon \psi - \overline{\left[\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \Delta_\epsilon \psi} + \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \overline{u_\phi}) \right] \right\}$$

Cette implémentation numérique est décrite en détail (écriture des matrices, grille radiale, discrétisation des opérateurs...) dans Aubert [2001].

2.4 Bilan sur la modélisation QG

Nous avons développé dans cette partie le contexte mathématique de notre étude numérique QG à partir des équations de base. Il faut garder en tête

1. que les équations de bases utilisées ici sous-entendent un certain nombre d'hypothèse. Certaines simplifications sont même effectuées parce que l'on ne sait pas faire autrement aujourd'hui.
2. que le modèle QG ajoute des hypothèses supplémentaires dans le cadre de la mécanique des fluides en milieu tournant.

Nous avons tenté de justifier au maximum les hypothèses utilisées. Cependant la description numérique que nous utilisons n'est qu'un modèle, dans lequel nous essayons de conserver les phénomènes physiques les plus importants. Le passage au modèle QG apporte bien des avantages, en particulier la paramétrisation de l'effet des couches limites d'Ekman et le passage de 3 à 2 dimensions, permet de simuler des taux de rotation plus grand et des écoulements plus turbulents. En ce sens il nous rapproche des objets que l'on cherche à étudier.

Par contre il faut garder en tête que les phénomènes étudiés se placent dans une géométrie sphérique, avec la possibilité donnée au fluide de rompre avec la contrainte de Proudman-Taylor. Par nature, les modèles QG ne peuvent pas prendre en compte de tels effets. Nous utiliserons aussi ce modèle en présence de champ magnétique dans la partie III, et le formalisme spécifique à cette question sera développé plus loin.

Deuxième partie

CONVECTION DANS UNE SPHERE EN ROTATION RAPIDE (SANS CHAMP MAGNETIQUE)

Introduction

Cette deuxième partie s'articule en trois chapitres. Le premier sera consacré au problème linéaire. Après avoir illustré quelques phénomènes particuliers à la mécanique des fluides géophysiques, nous rappellerons quelques résultats concernant le seuil d'instabilité. Nous présenterons ensuite l'impact de conditions aux limites de non-glissement (le pompage d'Ekman) sur l'estimation QG des paramètres critiques.

Nous abordons dans les chapitres 2 et 3 de cette partie la convection dite développée, c'est à dire que nous nous intéressons ici aux caractéristiques des écoulements fortement non-linéaires. A la fois l'équation de vorticité et l'équation de la chaleur présentent des non-linéarités. Notre objectif est de comprendre comment s'organisent les différents mécanismes pour contrôler la dynamique convective.

A l'aide de résultats de notre code QG, nous élaborons dans le chapitre 2 une mise à l'échelle des vitesses convectives. Ce travail résulte d'une collaboration avec Chris Jones de l'Université d'Exeter. Cette mise à l'échelle met en avant l'importance des non-linéarités thermiques lorsque la convection est loin du seuil d'instabilité. Notre approche est mise en perspective principalement par rapport à deux articles: le travail de Aubert et al. [2001] concernant l'équilibre inertiel, et celui de Plaut and Busse [2002] traitant de la convection faiblement non-linéaires en rotation rapide à petit Prandtl. Nous décrivons ensuite quelques comportements QG intéressants, avec la reproduction de jets multiples dans la structure du vent zonal.

Le troisième partie traite de nos résultats expérimentaux en eau et en gallium. Ces résultats reposent sur deux techniques de mesures: la mesure des fluctuations de température par thermocouples, et la vélocimétrie Doppler. Nous tenons à rappeler d'une part que ces résultats sont le fruit de développements techniques parfois complexes, et d'autre part que la présence de Jean-Paul Masson, l'ingénieur de l'équipe "géodynamo", a été primordiale pour le bon fonctionnement de cette expérience. Nous présentons tout d'abord une comparaison des expériences en gallium avec les résultats QG. On trouve un bon accord entre les deux, ce qui donne confiance dans notre modélisation. Il en est tout autrement en eau, où les expériences ont montré des comportements très étonnants, pas encore compris aujourd'hui.

Chapitre 1

Etude numérique du seuil de convection

Nous verrons tout d'abord dans ce chapitre quelques grandes lignes de la physique associée à l'équation de vorticité $(2.25)_I$, en particulier l'effet β et les ondes de Rossby. Ces questions sont abondamment traitées par Pedloski [1987]. Nous rappellerons ensuite les résultats généraux concernant le seuil d'instabilité de la convection en rotation rapide. Nous présenterons enfin l'impact du pompage d'Ekman sur le seuil de convection en comparant à la fois nos résultats QG à des résultats numériques 3D et à des résultats analytiques.

1.1 Rappels de travaux précédents

1.1.1 Quelques notions de dynamique des fluides géophysiques

Conservation de la vorticité potentielle

N'interviennent dans les équations $(2.25)_I$ et $(2.26)_I$ que les vitesses d'ordre 0. Nous noterons donc par la suite, par soucis de clarté, $\zeta = \zeta_z^0$ et $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0$. On peut mettre l'équation de vorticité sous la forme

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} + \frac{E^{1/2}}{H} P_u(\mathbf{u}^0) = R \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} + \Delta_e \zeta$$

où la vorticité potentielle \mathcal{P} est définie comme la somme de la vorticité relative ζ et de la vorticité planétaire $\zeta_P = -2\Omega \ln(H)$

$$\mathcal{P} = \zeta - 2\Omega \ln H$$

On peut comprendre cette grandeur ainsi: si l'on oublie les sources et puits de vorticité, la quantité \mathcal{P} est conservée le long de la trajectoire d'une particule fluide (cf Aubert [2001] et

Aubert et al. [2002]). Ainsi une colonne qui s'éloigne du cylindre tangent voit sa hauteur diminuer, et acquiert une vorticité relative négative (anticyclone), quand une colonne qui se rapproche du cylindre tangent s'étire en hauteur et acquiert une vorticité relative positive (cyclone).

De manière générale, la conservation de la vorticité potentielle résulte de la conservation du moment cinétique dans un référentiel en rotation. Celle-ci peut être exprimée à travers le théorème de Kelvin pour un fluide parfait barotrope (i.e. de densité ρ homogène): dans un référentiel galiléen \mathcal{G} , la circulation du vecteur vitesse $\mathbf{u}_{\mathcal{G}}$ le long d'un contour fermé \mathcal{C} se conserve

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{u}_{\mathcal{G}} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla_{\times} \mathbf{u}_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{n} dS = cte$$

avec \mathbf{n} la normale à la surface S définie par \mathcal{C} , et $\nabla_{\times} \mathbf{u}_{\mathcal{G}}$ la vorticité absolue. Revenons au cas qui nous intéresse ici, à savoir la convection dans une sphère en rotation rapide. Considérons une colonne de hauteur H et de surface S . La conservation du moment cinétique s'écrit alors

$$S(\zeta + 2\Omega) = cte$$

En prenant la différentielle de cette équation on arrive à

$$Sd\zeta + (\zeta + 2\Omega)dS = 0$$

Dans l'hypothèse $Ro \ll 1$ on peut négliger la vorticité relative devant la vorticité planétaire, et cela donne

$$d(\zeta + 2\Omega \ln S) = 0$$

Par ailleurs la conservation de la masse s'écrit ici $SH = cte$, si bien que la conservation de la vorticité potentielle finit par prendre la forme

$$d(\zeta - 2\Omega \ln H) = 0$$

Cette équation décrit les trajectoires des mouvements stationnaires en l'absence de forçage et de dissipation. Ces trajectoires, appelées contours géostrophiques, sont ici des cercles centrés sur l'axe de rotation. Seul un mouvement purement zonal peut suivre de tels contours. Les mouvements convectifs, quant à eux, sont gouvernés par la dissipation (visqueuse et thermique) et le forçage. On trouvera dans Aubert et al. [2002] une illustration expérimentale de ce phénomène.

Effet β et ondes de Rossby

On peut faire ici une analogie entre cet effet de topographie et l'effet- β observé dans l'océan et l'atmosphère. Ce dernier résulte de la variation du paramètre de Coriolis f avec la latitude

$$f = 2\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n} = 2\Omega \cos \theta$$

utilisé pour la dynamique des fluides géophysiques en couche mince (i.e. $H \ll r_e$, voir par exemple Pedloski [1987]). Dans le cas où l'étendue des mouvements reste petite devant le rayon de la Terre R_T , on peut linéariser cette expression autour d'une latitude de référence θ_0 . En se plaçant dans un repère cartésien (x, y) tangent à la surface terrestre (x compté le long d'un parallèle, y le long d'un méridien), on obtient

$$f = f_0 + \beta y \quad (1.1)$$

avec $f_0 = 2\Omega \cos \theta_0$, $\beta = \frac{2\Omega}{R_T} \sin \theta_0$ et $\beta y \ll f_0$. Dans le cas d'une couche de fluide de profondeur constante, la vorticité potentielle s'écrit

$$\mathcal{P} = \zeta + \beta y$$

Considérons une colonne fluide initialement à la latitude de référence θ_0 . En se dirigeant vers les pôles (resp. l'équateur) elle se retrouve alors dans une région où la vorticité planétaire est plus grande (resp. plus faible), et par là même acquiert une vorticité relative négative (resp. positive). Ce phénomène est associé à un type d'ondes bien particulier: les ondes de Rossby, pour lesquelles la force de rappel réside dans la variation de la vorticité planétaire (avec la latitude, la topographie, ou les deux).

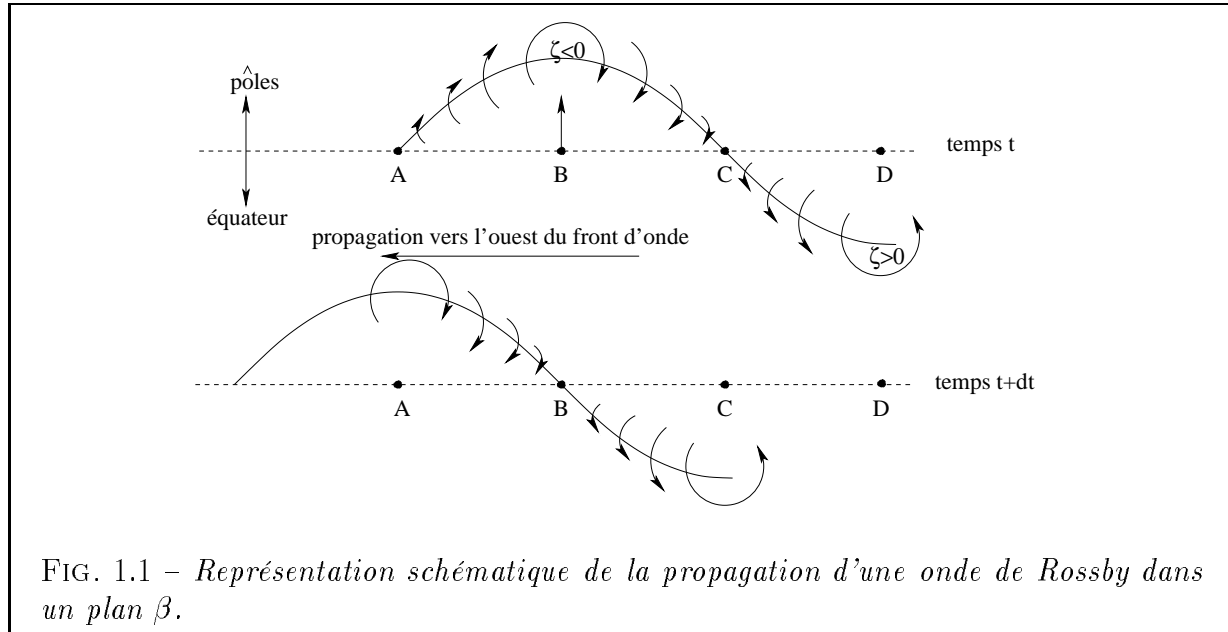


FIG. 1.1 – Représentation schématique de la propagation d'une onde de Rossby dans un plan β .

Nous allons illustrer les grandes lignes de ce phénomène dans le cas d'un plan β sans effet de topographie, en oubliant pour un temps le forçage et la dissipation. En linéarisant l'équation de vorticité, on peut obtenir l'équation de dispersion des ondes de Rossby, qui nous donne la pulsation ω de l'onde en fonction des nombres d'onde k_x et k_y

$$\omega = \frac{-2\beta k_x}{K^2}$$

avec $K^2 = k_x^2 + k_y^2$. En particulier la phase des ondes de Rossby se propage toujours vers l'ouest (voir le schéma de la figure 1.1). Par ailleurs on pourra remarquer que ces ondes sont très dispersives. NB: Rappelons tout de même que nous avons fait un certain nombre d'hypothèses pour arriver jusqu'ici (pas de stratification, filtrage des ondes d'inertie-gravité...), et que sans ces hypothèses la pulsation des modes de Rossby prend une autre forme.

1.1.2 Etude asymptotique de l'onde de Rossby thermique

Le problème linéaire de la convection en rotation rapide dans une sphère a été d'abord étudié analytiquement par Roberts [1968], Busse [1970] puis Soward [1977]. Dans la limite asymptotique $E \rightarrow 0$, l'onde qui naît au seuil d'instabilité est un mode de Rossby thermique, qui s'organise en une alternance de cyclones et d'anticyclones alignés avec l'axe de rotation Ω . Nous verrons plus bas que la nature du forçage définit les nombres d'onde k_x et k_y (correspondant à m_c ci-dessous). Sa structure, sous l'influence de la rotation, est quasi-invariante selon cet axe (voir la figure 1.2). Cela ne veut pas dire que le problème devient bi-dimensionnel. Comme nous l'avons vu dans la chapitre 2.3.2 de la partie I, les mouvements verticaux conservent un impact sur la dynamique. Cependant ce rôle peut être en partie paramétrisé via l'approche dite "Quasi-Géostrophique" (cf le chapitre 2.1 de la partie I), qui permet d'exploiter la particularité des écoulements géophysiques afin de réduire le problème mathématique à 2 dimensions. Ceci réduit le temps de calcul nécessaire à leur modélisation et permet de couvrir une gamme de paramètres bien plus vaste, en particulier de faibles nombres d'Ekman.

L'étude analytique du seuil de convection en rotation rapide nous donne l'évolution des paramètres critiques de l'onde de Rossby (nombre de Rayleigh R_c^0 , nombre d'onde m_c^0 et pulsation ω_c^0) en fonction des nombres de Prandtl et d'Ekman. On se place ici dans le cas du chauffage différentiel, dans une cavité où la pente des parois η_0 est constante, avec d_0 la distance entre les deux cylindres et H_0 la demi-hauteur près du cylindre tangent. L'onde de Rossby se propage de façon prograde, c'est à dire vers l'est. Ce n'est pas contradictoire avec le sens de propagation des ondes de Rossby présentées précédemment dans le contexte océanique à la surface de la Terre. En effet le sens de propagation de la phase de ces ondes dépend du signe du paramètre β , et ce signe est opposé entre le cas océanique présenté plus haut et notre étude. Dans notre cas les paramètres critiques de l'onde de Rossby thermique évoluent comme

$$\begin{cases} R_c^0 \sim 3\beta^{4/3} \\ m_c^0 \sim \beta^{1/3} \\ \omega_c^0 \sim \sqrt{2}\beta^{2/3} \end{cases} \quad (1.2)$$

avec

$$\beta = \left(\frac{P}{1+P} \right) \frac{2\sqrt{2}\eta_0 d_0}{EH_0} \quad (1.3)$$

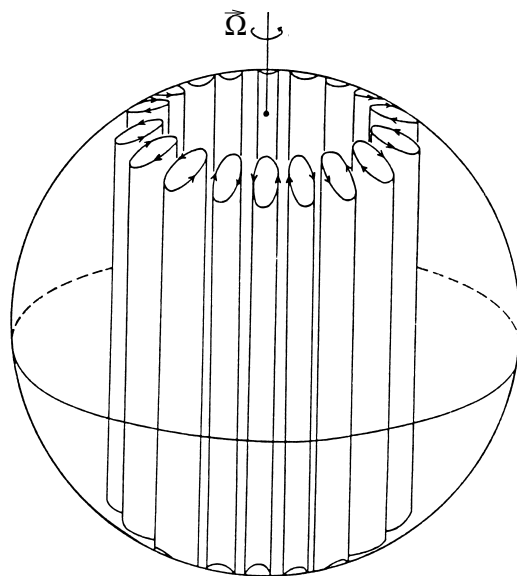


FIG. 1.2 – Schéma issu de Busse [1970], illustrant l'onde de Rossby thermique naissant au seuil de convection dans une sphère en rotation rapide, composée d'une alternance de cyclones et d'anticyclones alignés avec l'axe de rotation Ω .

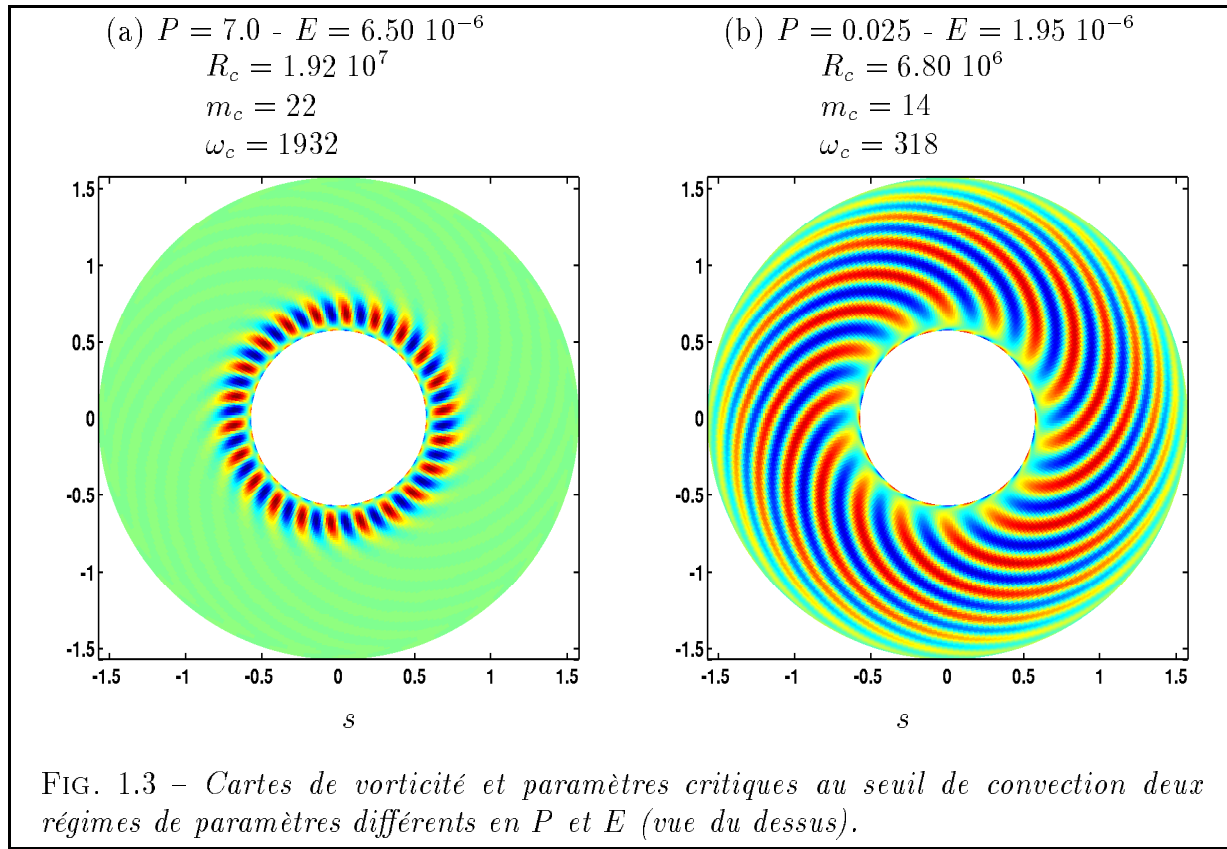
Il est important ici d'insister sur le fait que pour $P \gg 1$ le paramètre de contrôle est E alors que pour $P \ll 1$ (cas des métaux liquides) le seuil de convection dépend du nombre d'Ekman thermique

$$E_t = \frac{E}{P}$$

Lorsque la pente η varie avec s (comme dans le cas d'une sphère) alors les colonnes sont spiralées, et ce d'autant plus que P est petit, comme l'illustrent les cartes de vorticité de la figure 1.3. L'étude numérique du seuil de convection en 3D (voir Dormy [1997]) tend asymptotiquement vers les résultats analytiques aux faibles nombres d'Ekman. Par ailleurs Aubert et al. [2003] montrent que l'étude QG du seuil s'approche assez bien des résultats 3D.

1.1.3 La limite des ondes "équatoriales"

Pour des simulations numériques ou des expériences, dans lesquelles on a des valeurs finies des paramètres, l'approche asymptotique décrite plus haut soulève la question suivante: à partir de quand atteint-on la limite $E \rightarrow 0$ de manière satisfaisante? En particulier lorsque le nombre de Prandtl est faible et dans le cas où le nombre d'Ekman est relativement grand, Zhang and Busse [1987], puis Zhang [1993] ont montré qu'un autre type d'onde



peut être préféré : un mode "équatorial", attaché à la frontière extérieure, décrit comme une onde inertielle de basse fréquence. Ces mouvements, proches de l'équateur, sont tri-dimensionnels, et l'approche QG devient délicate (Yano [1992]). Notons qu'elle est toujours possible dans le cas d'un anneau tournant où la pente ne tend pas vers l'infini à la frontière extérieure (Plaut and Busse [2004]). Une analyse en perturbation par Busse and Simitev [2004] montre que le seuil de telles ondes évolue comme E^{-2} , contre $E^{-4/3}$ pour le mode de Rossby thermique, ce qui exclut le mode inertiel dans la limite asymptotique $E \rightarrow 0$. A faible P il faut donc faire attention (i.e. atteindre des nombres d'Ekman suffisamment petits) afin de se placer dans le cadre asymptotique des ondes de Rossby thermiques.

L'étude numérique de Ardes et al. [1997] (cf la figure 5 de cet article) nous propose une évaluation de la transition entre le mode de Rossby et le mode équatorial : pour atteindre le mode en colonnes situées près du cylindre tangent, il faut augmenter la rotation jusqu'à obtenir

$$E^* \simeq 2 \cdot 10^{-2} P^2$$

Notons qu'à faible E la transition entre les deux types de modes est assez brutale. Dans l'étude présentée ici, cette question se pose pour les simulations numériques et les expériences en gallium ($P = 0.025$). Le nombre d'Ekman limite se situe alors vers $E^* \simeq 10^{-5}$, ce qui est bien plus élevé que les valeurs typiques explorées, de l'ordre de $O(10^{-6})$. Par

la suite, nous serons donc toujours dans le cadre des ondes de Rossby thermiques. Remarquons qu'il ne nous est pas possible d'explorer expérimentalement ces ondes, car en tournant lentement la gravité terrestre prendrait le dessus sur la gravité centrifuge.

1.2 Impact du pompage d'Ekman

L'étude effectuée dans Aubert et al. [2003] ne prenait pas en compte le pompage d'Ekman pour les modes non axisymétriques. L'idée sous-jacente était que la dissipation volumique et la friction d'Ekman ne jouent qu'un faible rôle dans l'établissement de la convection développée, excepté pour le freinage du vent zonal (cf 2.1). Les raisonnements que nous avons élaborés depuis cet article réintègrent le rôle des dissipations (cf 2.3.1), et il nous a alors paru important de considérer l'importance relative du pompage d'Ekman et de la dissipation volumique.

1.2.1 Quelques estimations

Effectuons tout d'abord une estimation grossière d'ordres de grandeur. Nous noterons U l'ordre de grandeur des vitesses et L la taille caractéristique des colonnes. Au seuil la taille caractéristique (voir 1.1.2) peut être estimée à $L \sim \beta^{-1/3}$, où β est estimé à partir de (1.3) en utilisant $\eta_0 = \eta(s_i)$ et $H_0 = H(s_i)$. En considérant que $\Delta_\epsilon \mathbf{u}_e \sim u_e/L^2$, on peut alors estimer que l'amplitude de la dissipation volumique est de l'ordre de

$$D_V \sim O\left(\beta^{2/3}U\right)$$

et celle de la friction d'Ekman

$$D_E \sim O\left(E^{-1/2}U\right)$$

On remarquera que la diffusion thermique intervient uniquement dans la dissipation en volume, via le nombre de Prandtl. Le tableau 1.1 présente, pour un nombre d'Ekman typique de 10^{-6} , les ordres de grandeur respectifs des deux dissipations pour deux nombres de Prandtl différents (7.0 et 0.025). Nous pouvons tirer de cette estimation rapide deux enseignements: d'abord il n'est pas évident que la dissipation volumique soit dominante devant la friction de couches limites; ensuite on peut s'attendre à des comportements bien distincts suivant la valeur de P .

1.2.2 Comparaison aux résultats 3D linéaires

Nous proposons dans le tableau 1.2 une comparaison de l'étude du seuil d'instabilité entre modèles QG et 3D, suivant que l'on prend en compte ou non le pompage d'Ekman. Nous

P	β_0	D_V	D_E	D_V/D_E
7.0	$6.6 \cdot 10^5$	$\sim 7.6 \cdot 10^3 U$	$\sim 10^3 U$	~ 7.6
0.025	$1.8 \cdot 10^4$	$\sim 0.7 \cdot 10^3 U$	$\sim 10^3 U$	~ 0.7

TAB. 1.1 – *Estimations grossières de l'amplitude de la dissipation volumique (D_V) et de la friction d'Ekman (D_E) pour $E = 10^{-6}$ et deux nombres de Prandtl différents.*

nous plaçons toujours dans le cas du chauffage différentiel, pour $P = 1$ et différentes valeurs du nombre d'Ekman. Le seuil est déterminé à partir du système d'équations (2.18 – 2.19)_I linéarisé

$$\begin{cases} \frac{1}{P} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{2\eta}{EH} u_s + \frac{E^{-1/2}}{H} P_u(\mathbf{u}) = R \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} + \Delta_e \zeta \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_s \frac{dT_s}{ds} = \Delta_e \Theta \end{cases} \quad (1.4)$$

Le principe est de décrire numériquement les solutions de ce système sous la forme

$$\zeta_m = f_m(s, t) e^{-im\phi}$$

$$\Theta_m = g_m(s, t) e^{-im\phi}$$

avec f_m et g_m les fonctions propres associées au mode m . Les solutions (ζ_m, Θ_m) du système linéaire (1.4) sont toutes découplées les unes des autres. On note ω_m la pulsation de l'onde associée au mode m . Par itérations on cherche ensuite R_c , la plus petite valeur de R pour laquelle il existe une instabilité de nombre d'onde m_c qui présente un taux de croissance positif, i.e. qui vérifie $\Re(\omega_m) > 0$. Ce nombre de Rayleigh est alors le nombre de Rayleigh critique, m_c le nombre d'onde critique et la partie imaginaire $\omega_c = \Im(\omega_m)$ la pulsation critique.

Aubert et al. [2003] ont montré que les résultats linéaires issus d'une approche QG sans pompage d'Ekman étaient en bon accord avec les résultats 3D de Dormy [1997]. Nous avons étendu ici cette comparaison pour de plus faibles valeurs de E , en incluant ou non la friction aux parois, en nous référant à Dormy et al. [2004]. On remarquera dans le tableau 1.2 que le rapport entre les nombres de Rayleigh critiques QG et 3D semble saturer pour $E \rightarrow 0$, vers des valeurs proches de 0.95 avec pompage et 0.91 sans celui-ci.

Par ailleurs le nombre d'onde critique est toujours légèrement sur-estimé par notre code QG; cependant cette erreur est plus faible lorsque l'on prend en compte le pompage. Cette différence entre les nombres d'onde 3D et QG explique une partie des écarts assez importants observés entre les estimations QG et 3D de la pulsation ω_c , puisque $\omega(m)$ augmente avec m au voisinage de m_c . Ces écarts sont alors logiquement réduits en présence de pompage, et l'erreur relative entre des pulsations QG et 3D semble elle aussi saturer pour $E \rightarrow 0$.

Il apparaît ainsi que les résultats linéaires QG sont encore plus proches des simulations 3D lorsque le pompage d'Ekman est pris en compte, ce qui est encourageant pour notre code. Ces comparaisons justifient par ailleurs que l'on utilise par la suite nos calculs QG pour estimer les paramètres critiques relatifs à notre expérience.

E		3D	QG avec PE	QG sans PE	QG/3D avec PE	QG/3D sans PE
$4.734 \cdot 10^{-5}$	m_c	9	11	11	1.22	1.22
	R_c	$1.07 \cdot 10^6$	$1.04 \cdot 10^6$	$0.99 \cdot 10^6$.968	.922
	ω_c	233	340	397	1.46	1.70
$1.497 \cdot 10^{-5}$	m_c	13	15	16	1.08	1.23
	R_c	$4.21 \cdot 10^6$	$4.07 \cdot 10^6$	$3.85 \cdot 10^6$.965	.915
	ω_c	533	730	834	1.36	1.56
$4.734 \cdot 10^{-6}$	m_c	19	22	23	1.15	1.21
	R_c	$1.71 \cdot 10^7$	$1.64 \cdot 10^7$	$1.56 \cdot 10^7$.958	.913
	ω_c	1202	1587	1764	1.32	1.46
$1.497 \cdot 10^{-6}$	m_c	28	31	32	1.10	1.14
	R_c	$7.09 \cdot 10^7$	$6.77 \cdot 10^7$	$6.47 \cdot 10^7$.955	.913
	ω_c	2672	3428	3740	1.28	1.40
$4.734 \cdot 10^{-7}$	m_c	40	44	46	1.10	1.15
	R_c	$3.00 \cdot 10^8$	$2.87 \cdot 10^8$	$2.75 \cdot 10^8$.955	.916
	ω_c	5922	7410	7949	1.25	1.34

TAB. 1.2 – Comparaison, suivant que le pompage d'Ekman (PE) est pris en compte ou non, entre les paramètres critiques issus de calculs QG et ceux issus de simulations 3D par Dormy et al. [2004], dans le cas du chauffage différentiel, pour les paramètres $P = 1$ et $s_i/s_e = 4/11$.

1.2.3 Comparaison aux résultats analytiques linéaires

Par ailleurs, nous avons étudié l'effet du même pompage sur les paramètres critiques pour $P = 7.0$ et $P = 0.025$ (voir le tableau 1.3). Il est intéressant de voir que des effets opposés sont observés suivant que P est plus grand ou plus petit que $O(1)$: effet déstabilisant dans le cas $P \gg O(1)$, effet stabilisant pour $P \ll O(1)$. Ceci va qualitativement dans le même sens que les calculs numérique 3D (dans une sphère) et l'étude analytique effectués par Zhang and Jones [1992]. Leur étude analytique se place dans le cas d'un chauffage interne (distribution uniforme de sources de chaleur), dans un anneau en rotation présentant des parois légèrement inclinées (plan β). Ce n'est pas exactement le cas qui nous intéresse, mais nous nous arrêtons ici à une comparaison qualitative.

Cette étude montre qu'à l'ordre le plus grand la friction d'Ekman induit une modification des paramètres critiques d'ordre $O(E^{1/6})$

$$\begin{cases} R_c \sim \beta_0^{4/3} [1 + C_R(P).E^{1/6}] \\ m_c \sim \beta_0^{1/3} [1 + C_m(P).E^{1/6}] \\ \omega_c \sim \beta_0^{1/3} [1 + C_\omega(P).E^{1/6}] \end{cases}$$

où l'effet $C_\omega(P)$ est toujours de diminuer la pulsation, et ce d'autant plus que P est grand. Par contre l'impact $C_m(P)$ est opposé suivant la valeur de P : diminution du nombre d'onde à grand P ($C_m < 0$), et augmentation à faible P ($C_m > 0$). Le caractère stabilisant ou non (le signe de $C_R(P)$, négatif à P élevé, positif à P faible) découle alors des variations de C_ω et C_m .

Nous retrouvons bien avec notre code QG l'effet stabilisant, l'augmentation du nombre d'onde et la (légère) diminution de la pulsation à $P = 0.025$ (voir Table 1.3). De même nous reproduisons l'effet déstabilisant, la diminution du nombre d'onde et une (plus forte) diminution de la pulsation à $P = 7.0$. Notons que nous avons juste voulu illustrer ici le comportement qualitatif des résultats numériques de notre code QG. Une étude plus approfondie serait nécessaire pour relier quantitativement nos résultats à une étude analytique.

L'interprétation physique donnée par Zhang and Jones [1992] pour expliquer ces deux effets, opposés suivant le nombre de Prandtl, n'est pas directe. Elle met l'accent sur la dépendance temporelle associée aux ondes de Rossby. C'est alors un effet spécifique au plan β , qui ne se retrouve pas dans le cas de la convection dans une couche plane avec une rotation d'axe vertical (Chandrasekhar [1961]). En effet dans cette dernière le rôle des dissipation visqueuses est de briser la contrainte de Proudman-Taylor. Dès lors des conditions de non-glissement ajoutent une dissipation et donc déstabilisent la convection. Revenons alors au plan β : à faible P , où la diffusion thermique domine, la pulsation n'est que peu affectée par l'ajout d'une friction de couche limite. Par contre à grand P l'effet de la friction d'Ekman réduit sensiblement la pulsation. C'est par cet intermédiaire que la déstabilisation a lieu. Une description plus fine nécessiterait de développer entièrement le système d'équations.

	P=7.0			P=0.025		
	Ra_c	m_c	ω_c	Ra_c	m_c	ω_c
sans pompage	$2.05 \cdot 10^7$	24	2296	$9.05 \cdot 10^6$	13	328
<i>pompage inclus</i>	<i>$1.92 \cdot 10^7$</i>	<i>22</i>	<i>1932</i>	<i>$9.80 \cdot 10^6$</i>	<i>14</i>	<i>318</i>
avec/sans	0.94	0.92	0.84	1.08	1.08	0.97

TAB. 1.3 – Paramètres critiques donnés par le code QG avec et sans pompage d'Ekman, pour $\Omega = 300$ tours par minutes (tpm) et différents nombres de Prandtl: $P = 7.0$ ($E = 6.50 \cdot 10^{-6}$) et $P = 0.025$ ($E = 1.95 \cdot 10^{-6}$).

Chapitre 2

Etudes numérique et théorique de la convection non-linéaire

Dans ce chapitre consacrée aux aspects non-linéaires de la convection en rotation rapide, nous rappellerons tout d'abord l'un des principaux résultats de Aubert et al. [2001] concernant l'équilibre inertiel. Nous avons longtemps raisonné à partir de cet article qui met en valeur l'importance du tenseur de Reynolds dans l'équation de vorticité. Nous reviendrons ensuite sur les raisons qui nous ont pouss    reconsidérer le problème à l'aide de réflexions sur les couches limites et la taille des tourbillons.

Nous décrivons alors comment nous avons été amen    développer avec Chris Jones une nouvelle mise à l'échelle centrée cette fois sur les non-l n arit s thermiques. Cette approche n'est a priori valable que pour de grandes valeurs de P . Nous nous concentrons ensuite sur le cas des faibles nombres de Prandtl P : après une brève présentation de quelques effets spécifiques de la convection faiblement non-l n aire (notamment l'importance du vent zonal, voir Busse and Or [1986], puis Herrmann and Busse [1997] et Plaut and Busse [2002]), nous r int grons notre mise à l'échelle "thermique" pour la convection largement développée quelle que soit la valeur de P ,   l'aide de considérations sur la saturation du vent zonal.

Quelques notations

Avant d'aller plus loin, rappelons que les vitesses peuvent se décomposer en une composante axisymétrique (le vent zonal) et une composante non-axisymétrique (les vitesses convectives):

$$\mathbf{u}(s, \phi, t) = \mathbf{u}_c(s, \phi, t) + \overline{u_\phi}(s, t)\mathbf{e}_\phi$$

Nous noterons de manière générale L la taille caractéristique des tourbillons. Nous rappelons que le champ de température T est séparé entre le profil statique T_s et une perturbation Θ . Cette perturbation est elle même divisée entre sa partie axisymétrique $\bar{\Theta}$ et les fluctuations de température $\hat{\Theta}$:

$$T(s, \phi, t) = T_s(s) + \bar{\Theta}(s, t) + \hat{\Theta}(s, \phi, t)$$

Nous précisons dès maintenant les notations utilisées dans la suite du manuscript. Nous noterons E_c et \bar{E} les énergies associées respectivement aux mouvements convectifs et zonaux, avec

$$E_c(t) = \frac{1}{V} \int_V |\mathbf{u}_c(s, \phi, t)|^2 dV$$

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{V} \int_V |\bar{u}_\phi(s, t)|^2 dV$$

avec V le volume total du fluide. A partir de séries temporelles de vitesses convectives et de température, nous définissons les profils radiaux

$$U_c(s) = \left[\frac{1}{\tau} \int_\tau \overline{|\mathbf{u}_c(s, \phi, t)|^2} dt \right]^{1/2}$$

$$\Theta_c(s) = \left[\frac{1}{\tau} \int_\tau \overline{|\hat{\Theta}(s, \phi, t)|^2} dt \right]^{1/2}$$

avec τ le temps d'intégration. Le choix de ce temps est discuté à la fin de ce paragraphe. Nous pouvons séparer le profil de vitesse entre ses composantes radiale et azimutale:

$$U_s(s) = \left[\frac{1}{\tau} \int_\tau \overline{|\mathbf{u}_c \cdot \mathbf{e}_s|^2} dt \right]^{1/2}$$

$$U_\phi(s) = \left[\frac{1}{\tau} \int_\tau \overline{|\mathbf{u}_c \cdot \mathbf{e}_\phi|^2} dt \right]^{1/2}$$

A partir des séries temporelles des composantes axisymétriques de la vitesse et la température, nous définissons les profils

$$U_\phi^0(s) = \frac{1}{\tau} \int_\tau \bar{u}_\phi(s, t) dt$$

$$\Theta_c^0(s) = \frac{1}{\tau} \int_\tau \bar{\Theta}(s, t) dt$$

L'estimation numérique du nombre de Nusselt est faite en s_i , où la condition de non-glissement nous permet de calculer à partir de l'équation (2.17) de la partie I

$$Nu - 1 = \left(\frac{\partial T_s}{\partial s} \Big|_{s_i} \right)^{-1} \frac{1}{\tau} \int_\tau \left[\frac{\partial}{\partial s} \bar{\Theta}(s, t) \right]_{s_i} dt$$

Pour déterminer l'amplitude caractéristique d'une grandeur, nous choisissons de considérer le maximum de son profil radial. Ce choix, comme nous le verrons par la suite, présente

parfois quelques inconvénients. Cependant c'est celui qui nous a paru le plus pertinent, en particulier lors des comparaisons avec les résultats expérimentaux. Nous noterons alors par la suite

$$\begin{aligned}\hat{U}_c &= \max [U_c(s)] \quad , \quad \hat{U}_s = \max [U_s(s)] \quad , \quad \hat{U}_\phi = \max [U_\phi(s)] \\ \hat{\Theta}_c &= \max [\Theta_c(s)] \quad , \quad \hat{U}_\phi^0 = \max [|U_\phi^0(s)|] \quad , \quad \delta\Theta = \max [| \Theta_c^0(s) |]\end{aligned}$$

Le choix du temps d'intégration

Le choix du temps d'intégration τ est un point délicat, car il soulève de nombreuses questions sous-jacentes, concernant en particulier le temps thermique caractéristique. On peut distinguer ici deux cas:

1. Prandtl petit (gallium):

C'est le cas le plus simple, et ce pour deux raisons. Tout d'abord comme la chaleur est vite diffusée dans les métaux, l'état stationnaire est rapidement atteint d'un point de vue thermique (ce que nous vérifions numériquement en suivant l'évolution temporelle du nombre de Nusselt). Ensuite, comme nous le verrons par la suite, la forme générale des profils de vitesses varie peu dans le temps et ne dépend que faiblement des paramètres explorés. Dès lors si l'on prend soin d'intégrer sur une durée bien plus grande que le temps caractéristique des fluctuations chaotiques (pour un exemple, voir la figure 2.11 de droite), le choix du temps d'intégration influe peu sur le résultat obtenu. Ceci amène par ailleurs à intégrer sur plusieurs dizaines de fois le temps thermique $\tau_\kappa \sim d^2/\kappa$.

2. Prandtl grand (eau):

Dans ce cas aussi les résultats présentés sont intégrés sur une durée bien plus grande que le temps caractéristique des fluctuations chaotiques. Mais dans ce cas, où la chaleur est relativement mal diffusée, que représente le temps d'une fluctuation chaotique par rapport au temps thermique τ_κ ? Nous n'avons pas vraiment de réponse nette à cette question.

Prenons par exemple le cas de notre expérience de convection en eau. Une estimation à partir de la taille de la sphère ($d=7$ cm) et de la diffusivité thermique de l'eau amène à $\tau_\kappa \sim 10$ heures! Considérer la taille des colonnes (disons 1 cm) réduit ce temps à 12 min. Comme nous le verrons plus loin, cela reste encore très long, étant donné que nos expériences indiquent que l'état stationnaire semble atteint au bout d'un temps de l'ordre de la minute.

Pratiquement le temps d'intégration utilisé pour présenter les profils de vent zonaux numériques est du même ordre de grandeur que celui utilisé expérimentalement, à savoir de l'ordre de quelques minutes (temps physique). Nous verrons que proche du seuil d'instabilité, la forme des profils de vitesse est assez simple, avec un seul jet zonal rétrograde d'amplitude légèrement fluctuante. Il est alors assez rapide d'obtenir des profils de vitesse représentatifs.

Lorsque l'on s'éloigne du seuil et que la forme des profils se complique, (naissance de jets multiples...), et la définition d'un temps d'intégration représentatif est moins aisée. Sur le temps de mesure expérimental (parfois jusqu'à la dizaine de minutes), une fois le vent zonal établi, nous avons observé des fluctuations de son amplitude... mais la structure des profils moyens ne change pas drastiquement au cours du temps (voir par exemple la figure 3.13 du bas: on peut moyenner sur la première moitié de la carte ou la seconde, les profils restent proches).

Nous avons aussi vérifié, pour intégrer les profils numériques, que l'on n'observait pas de dérive systématique de la forme du profil sur le temps d'intégration, mais seulement des fluctuations. Nous reviendrons brièvement sur cette question dans le chapitre consacré aux mesures expérimentales en eau.

NB: les profils de vitesse présentés par la suite sur les cartes de vorticité sont des instantanés. Ils peuvent alors différer des profils intégrés dans le temps.

2.1 L  quilibre inertiel

2.1.1 Impact du pompage d'Ekman sur la convection développée

Nous rappelons que la différence entre le code utilisé dans Aubert et al. [2003] et celui utilisé ici ne r s de que dans l'ajout du pompage d'Ekman pour les modes non axi-symétriques. Cette modification ne change pas uniquement le seuil de convection comme nous l'avons vu précédemment, mais aussi l'établissement de la convection développée. En guise d'exemple nous présentons dans la figure 2.1 des séries temporelles de énergies E_c et \overline{E} pour un nombre de Rayleigh R fixé, avec et sans pompage d'Ekman. En eau ($P = 7.0$, figure 2.1a) on note une diminution de 44% de l'énergie zonale, et de 33% de l'énergie convective. Le même exercice en gallium ($P = 0.025$, Figure 2.1b) montre une chute assez différente: 65% des vitesses zonales et 69% des vitesses convectives !

Notons déjà que ces évolutions ne peuvent être expliquées par l'impact du pompage d'Ekman sur le seuil de convection, présenté dans le tableau 1.3 pour les deux jeux de paramètres. En effet ce dernier n'augmente l'écart au seuil à $P = 7.0$ que de quelques pourcents (déstabilisation de $R = 40.0 R_c$   $R = 42.7 R_c$), et ne modifie que très faiblement le seuil d'instabilité à $P = 0.025$ (stabilisation de $R = 2.0 R_c$   $R = 1.9 R_c$).

Ensuite on peut voir que les vitesses sont relativement bien plus touchées en gallium qu'en eau - pour des vitesses dimensionnées du même ordre de grandeur: quelques mm/s. La friction d'Ekman va de ce fait limiter l'importance des non-linéarités dynamiques initialement plus fortes en gallium.

Par ailleurs l'impact relativement plus fort à faible P va dans le même sens que les estimations grossières du Tableau 1.1 faites à partir des tailles au seuil. En effet la forte

diffusion du champ de température en gallium est à l'origine de cellules relativement plus grosses qu'en eau, ce qui diminue l'importance relative de la dissipation volumique. Il est alors naturel que l'impact du pompage d'Ekman y soit plus important. NB: nous ne présentons ici qu'une étude ponctuelle illustrant différents comportements dynamiques. Une étude systématique serait nécessaire pour en tirer plus d'enseignements.

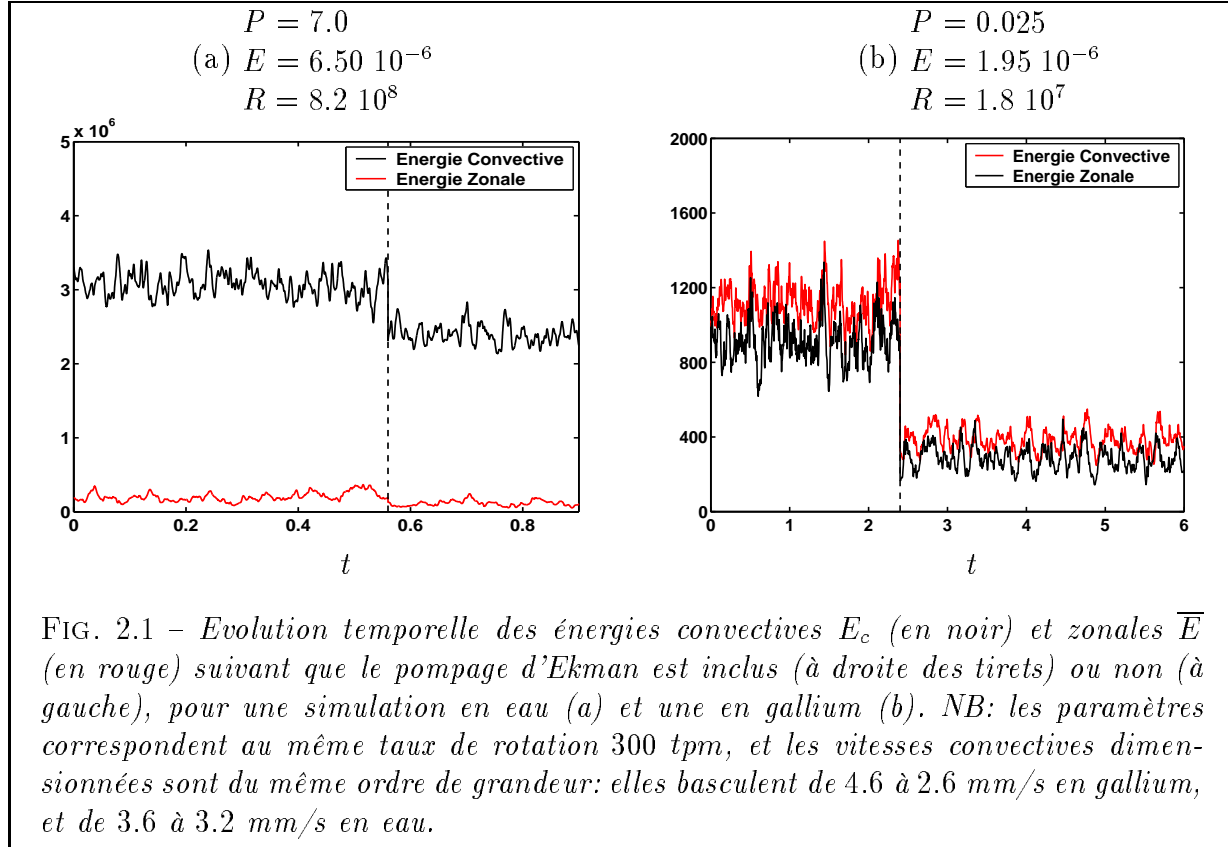


FIG. 2.1 – Evolution temporelle des énergies convectives E_c (en noir) et zonales \bar{E} (en rouge) suivant que le pompage d'Ekman est inclus (à droite des tirets) ou non (à gauche), pour une simulation en eau (a) et une en gallium (b). NB: les paramètres correspondent au même taux de rotation 300 tpm, et les vitesses convectives dimensionnées sont du même ordre de grandeur: elles basculent de 4.6 à 2.6 mm/s en gallium, et de 3.6 à 3.2 mm/s en eau.

2.1.2 L'équilibre inertiel selon Aubert et al. [2001]

Le but est ici d'exprimer l'évolution de la taille caractéristique L , des vitesses convectives U_c , et des perturbations de température Θ_c , en fonction du forçage R , en suivant la démarche décrite par Aubert et al. [2001]. On part pour cela des équations de vorticité (2.18)_I et de température (2.19)_I, que nous rappelons ici:

$$\frac{1}{P} \frac{d\zeta}{dt} + \frac{2\eta}{EH} u_s + \frac{E^{-1/2}}{H} P_u(\mathbf{u}) = R \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} + \Delta_e \zeta$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla_e \right] \Theta + u_s \frac{dT_s}{ds} = \Delta_e \Theta$$

La démarche suivie dans ce paragraphe se base sur l'échelle de Rhines (Rhines [1975]). Celle-ci est le résultat de la cascade inverse, dans les milieux en rotation rapide, de l'énergie cinétique vers les grandes échelles (Kraichnan [1967]): quelle que soit l'échelle d'injection - associée ici à la convection - l'énergie va migrer vers une échelle qui ne dépend que de la vitesse et de la rotation. Cette échelle résulte en fait d'un équilibre entre le terme non-linéaire de la force inertielle $\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ et la force de Coriolis (voir Ingersoll and Pollard [1982] dans le cadre des atmosphères de Jupiter et Saturne):

$$\frac{1}{P} \mathbf{u}_e \cdot \nabla_e \zeta \sim \frac{2\eta}{EH} u_s$$

Si l'on estime

$$\zeta \sim \frac{\hat{U}_c}{L} \sim \frac{\hat{U}_s}{L} \quad (2.1)$$

on obtient alors

$$L \sim \left(\frac{EH}{2\eta P} \hat{U}_s \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

La dynamique indique d'introduire alors la force d'Archimède dans l'équilibre:

$$\frac{2\eta}{EH} \hat{U}_s \sim R \frac{\hat{\Theta}_c}{L} \quad (2.3)$$

La dernière étape consiste à intégrer le flux de chaleur via le nombre de Nusselt. Aubert et al. [2001] estiment celui-ci à partir de (2.17)_I

$$Nu - 1 \sim \hat{U}_s \hat{\Theta}_c \quad (2.4)$$

pour clore le problème. Ce système (2.2 - 2.3 - 2.4) amène alors à:

$$\begin{cases} \hat{U}_s \sim (EP)^{1/5} R_Q^{2/5} \\ R \hat{\Theta}_c \sim (EP)^{-1/5} R_Q^{3/5} \\ L \sim E^{3/5} P^{-2/5} R_Q^{1/5} \end{cases} \quad (2.5)$$

avec R_Q le nombre de Rayleigh basé sur le flux de chaleur:

$$R_Q = (Nu - 1)R$$

On peut remarquer que la viscosité n'intervient évidemment pas dans la mise à l'échelle des vitesses convectives et des tailles puisque la force visqueuse n'a pas été prise en compte. Pour évaluer l'intensité du vent zonal $\overline{U_\phi}$ on part de la composante axisymétrique de l'équation de quantité de mouvement (2.26)_I, dans laquelle on équilibre le tenseur de Reynolds par les dissipations (nous rappelons qu'on ne trouve ni terme d'Archimède ni terme de Coriolis

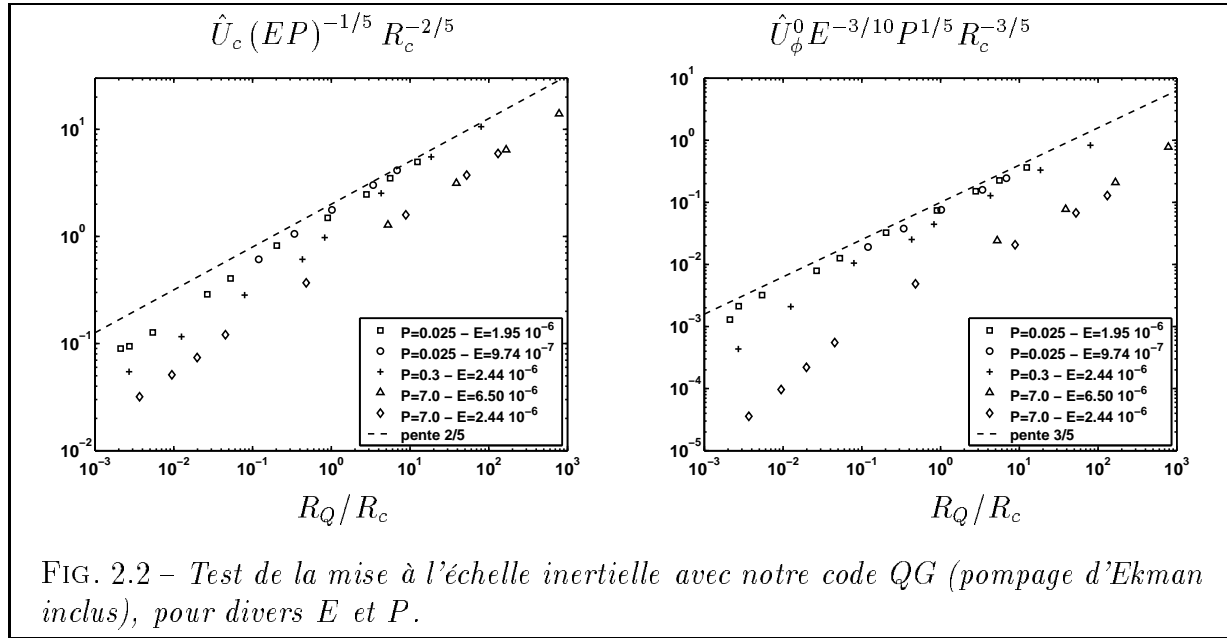
dans l'équation des mouvements axi-symétriques). Aubert et al. [2001] estiment que le pompage d'Ekman est le principal puits d'énergie et obtiennent

$$\overline{u_e \cdot \nabla_e u_\phi} \sim \frac{\hat{U}_s^2}{L} \sim \frac{P}{E^{1/2}} \hat{U}_\phi^0 \quad (2.6)$$

En introduisant le résultat (2.5) on arrive à :

$$\hat{U}_\phi^0 \sim E^{3/10} P^{-1/5} R_Q^{3/5}$$

Le choix de la friction d'Ekman plutôt que de la dissipation volumique, ainsi que l'estimation quadratique du tenseur de Reynolds, seront rediscutés dans la section 2.3.1. Nous testons l'équilibre inertiel pour les vitesses convectives et zonales sur la figure 2.2. Nous n'avons pas porté ici d'attention particulière aux préfacteurs présents dans l'échelle inertielle, qui dépendent de la géométrie de la cavité (Aubert et al. [2001] pour plus de détails). Notons tout d'abord que pour une valeur donnée du nombre de Prandtl, l'exposant 2/5 (resp. 3/5) semble convenir pour décrire l'évolution de \hat{U}_c (resp. \hat{U}_ϕ^0). Par ailleurs la dépendance au nombre d'Ekman est elle aussi satisfaisante. Ces deux points penchent en faveur de cette description.



2.1.3 Quelques incompatibilités

Il existe cependant quelques questions à propos de cette mise à l'échelle, que nous allons évoquer dans ce paragraphe.

Echelle inertielle et nombre de Prandtl

La première remarque concerne la dépendance au nombre de Prandtl prédite par l'échelle inertielle. La figure 2.2a montre, pour notre estimation QG des vitesses convectives, qu'il existe un rapport de l'ordre de 3 entre le préfacteur des simulations en eau ($P = 7.0$) et celui des simulations en gallium ($P = 0.025$). Or ce préfacteur n'est censé dépendre que de la géométrie. Par ailleurs l'équilibre inertiel présente le vent zonal comme une fonction quadratique de \hat{U}_c . Il en résulte alors un facteur de l'ordre de 10 entre l'estimation QG du vent zonal en eau et en gallium, comme le montre la figure 2.2b.

Par ailleurs Woody Shew (College Park, Maryland) a mené des expériences de convection en rotation rapide très surcritique en eau ($P = 7.0$) et en sodium ($P = 0.01$), où il mesure le flux de chaleur et les perturbations de température. Ses estimations (indirectes) de vent zonal semblent incompatibles avec l'échelle inertielle (présentation à l'EGS [2004] et communication personnelle).

Echelle de Rhines et vent zonal

La seconde remarque concerne l'écriture de l'échelle de Rhines (2.2) dans le cas où le vent zonal est très intense. On peut noter que dans le développement mené par Aubert et al. [2001], le vent zonal \hat{U}_ϕ^0 augmente plus vite que les vitesses convectives \hat{U}_c . L'estimation (2.1) doit donc être corrigée à partir du moment où la contribution $\bar{\zeta}$ du vent zonal à la vorticité devient dominante devant la contribution ζ_c des vitesses convectives. Dans ce cas il faut considérer

$$\zeta \sim \frac{\hat{U}_\phi^0}{L} \quad (2.7)$$

ce qui va modifier l'échelle de Rhines (2.2), et par conséquent la mise à l'échelle complète. En considérant (2.7), l'échelle de Rhines s'écrit

$$L \sim \left(\frac{EH}{2\eta P} \hat{U}_\phi^0 \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

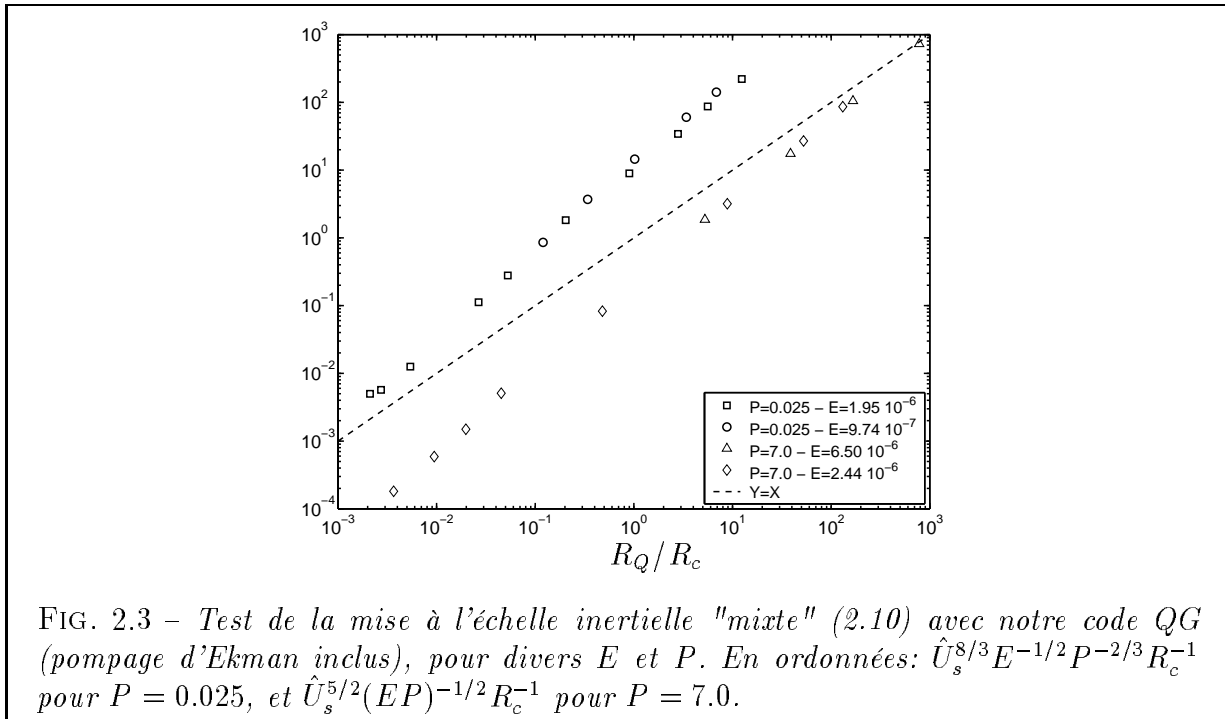
c'est à dire que le vent zonal intervient à part entière dans la mise à l'échelle, et n'est plus uniquement une conséquence des mouvements convectifs. Le système à résoudre devient donc (2.3 - 2.4 - 2.6 - 2.8) et nous amène alors à

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_s \sim E^{3/16} P^{1/4} R_Q^{3/8} \\ R\hat{\Theta}_c \sim E^{-3/16} P^{-1/4} R_Q^{5/8} \\ L \sim E^{5/8} P^{-1/2} R_Q^{1/4} \\ \hat{U}_\phi^0 \sim E^{1/4} R_Q^{1/2} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

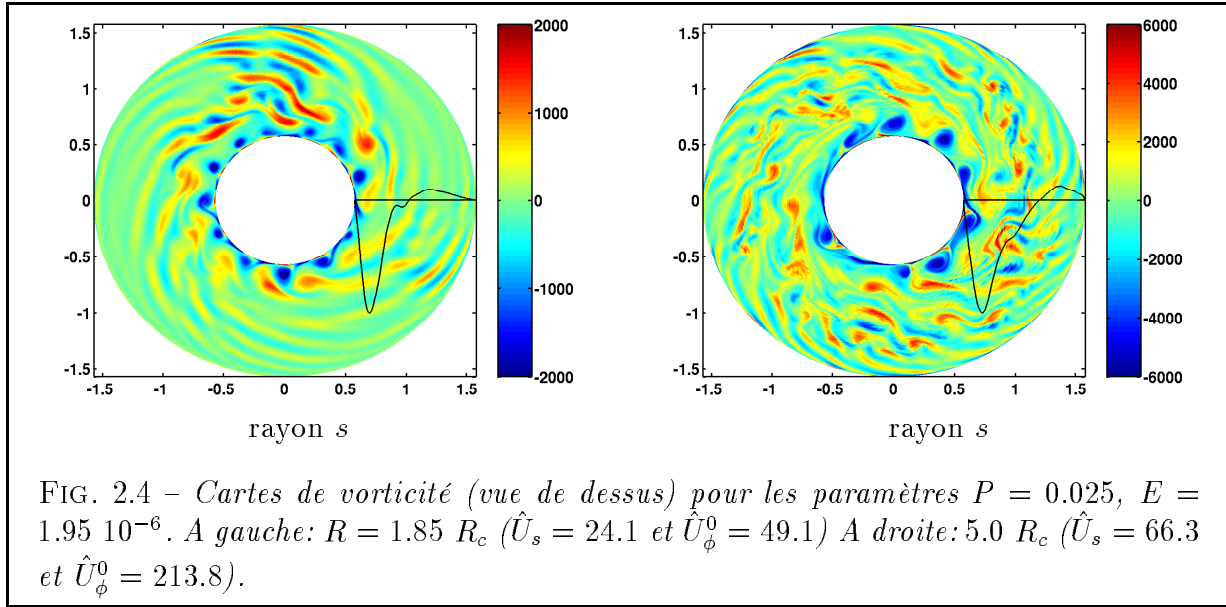
Comme nous le verrons plus loin, de faibles valeurs de P favorisent la présence d'un vent zonal intense. Ainsi parmi tous nos calculs QG, seules les simulations en gallium se trouvent dans un tel cas de figure. Cela se traduit par la présence d'un anneau d'anticyclones près du cylindre tangent, associé à un vent zonal rétrograde (voir pour cela les cartes de vorticité de la figure 2.4). Ainsi seules nos simulations à $P=0.025$ sont concernées par une telle modification. Ils nous faut alors considérer en parallèle l'équilibre (2.5) pour nos simulations en eau et (2.9) pour celles en gallium. C'est ce que nous faisons sur la figure 2.3, en pr sentrant une mise à l'échelle "mixte" des vitesses radiales:

$$\begin{cases} \hat{U}_s^{8/3} E^{-1/2} P^{-2/3} \sim R_Q \text{ pour } P = 0.025 \\ \hat{U}_s^{5/2} (EP)^{-1/2} \sim R_Q \text{ pour } P = 7.0 \end{cases} \quad (2.10)$$

La dépendance au nombre d'Ekman est peu modifiée (l'exposant passe de $1/5$   $3/16$)



et semble toujours compatible pour un nombre de Prandtl donné. La question concernant la dépendance au nombre de Prandtl reste présente: la modification de l'exposant de $1/5$   $1/4$ est trop faible pour récupérer le problème soulevé plus haut. Il apparaît aussi que pour les deux valeurs explorées du nombre de Prandtl, les vitesses convectives évoluent légèrement trop vite en fonction de R_Q/R_c . La taille L des structures devrait quand à elle augmenter plus vite aux faibles P (exposant $1/4$ plutôt que $1/5$). Comme nous allons le voir dans le prochain paragraphe, cela rend nos simulations QG encore moins compatibles avec la nouvelle mise à l'échelle (2.9) qu'avec la précédente (2.5).



Taille des tourbillons et échelle de Rhines

La dernière remarque concerne la taille des tourbillons, que l'on n'arrive pas à accorder avec l'échelle de Rhines. Aubert et al. [2001] avait déjà noté dans ses expériences qu'il n'observait pas d'agrandissement notable de la taille des structures. Or l'échelle de Rhines, pour une rotation donnée, nous dit que la taille doit doubler à chaque fois que l'on multiplie les vitesses par 4! Nous avons tenté ici d'évaluer l'évolution de la taille des structures, en étudiant les profils de vitesse. En gallium, comme nous l'avons dit plus haut, l'intensité du vent zonal domine celle des vitesses convectives. Le signe de la vorticité est alors directement relié au gradient de vent zonal:

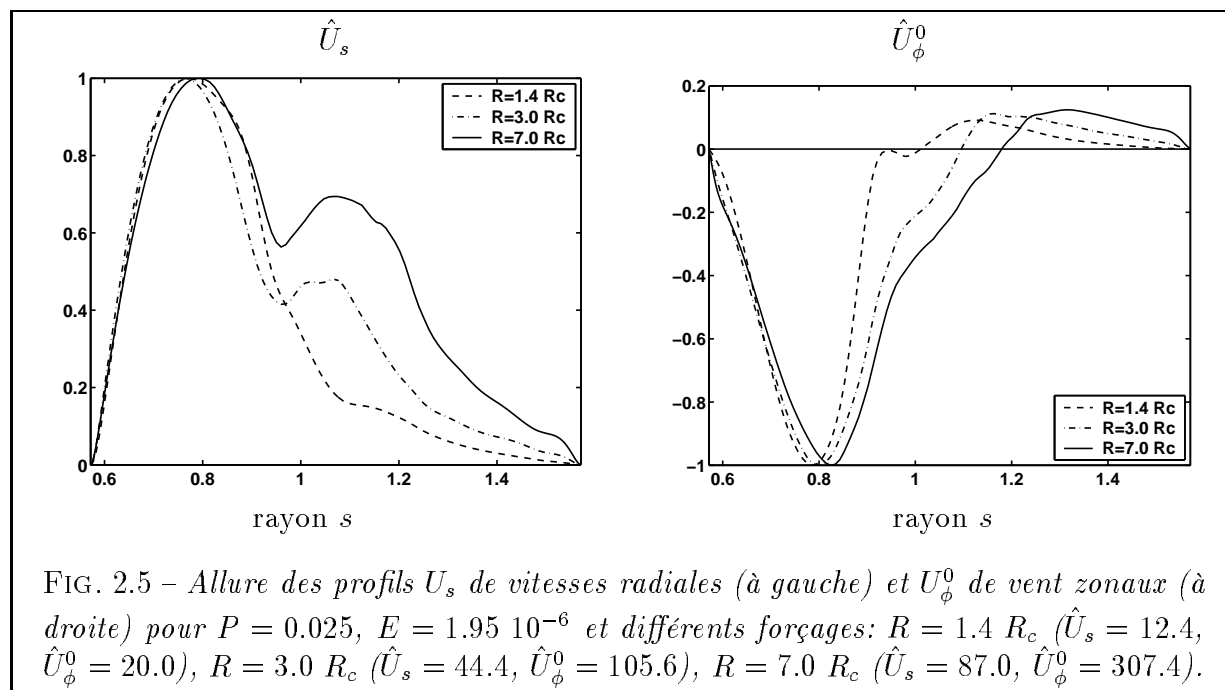
$$\zeta \sim \frac{\partial \bar{u}_\phi}{\partial s}$$

et on peut alors connaître la taille des tourbillons en repérant les extrema de vent zonal, limite entre un anneau intérieur d'anticyclones et un anneau extérieur de cyclones (moins marqué du fait d'un gradient plus faible). La figure 2.5 montre des profils normés de vitesses radiales et zonales à différents forçages. On remarque que si le minimum du vent zonal se déplace un peu vers l'extérieur (i.e. la taille des tourbillons augmente légèrement, comme on le voit sur la figure 2.4), cette augmentation ne suit pas celle du vent zonal: ce dernier est multiplié par presque 16 quand on passe de $R = 1.4 R_c$ à $R = 7.0 R_c$, ce qui devrait aller de pair avec une taille multipliée par 4! Nous constatons alors que la taille des tourbillons évolue bien moins vite que l'échelle de Rhines.

Cette observation contredit donc une des hypothèses à la base de l'équilibre inertiel, sur lequel est fondé l'article de Aubert et al. [2003]. Nous décrivons alors la convection développée en rotation rapide comme un processus non visqueux. C'est avec une telle vision de

dynamique que nous avons négligé la friction d'Ekman pour les modes non-axisymétriques. La prise en compte de ce phénomène pour tous les modes nous amène aujourd'hui à aborder le sujet sous un jour complètement différent. C'est aussi ce qu'indique la figure 2.1, où l'on observe le caractère indispensable de la friction d'Ekman. Ceci nous amènera à réintégrer le rôle des dissipations dans les chapitres à venir.

Continuons avec la description des profils normés de vitesse radiale, qui présentent une allure assez intéressante. Tout d'abord un premier maximum de vitesse radiale se situe en vis à vis du minimum de vitesse zonale - et pourrait au passage servir à estimer la taille des structures. Ce premier extremum correspond aux fluctuations de vitesse liée à la présence des cyclones et des anticyclones, advectés par le vent zonal. Ces tourbillons sont issus de la déstabilisation des ondes de Rossby. S'ils sont suffisamment intenses, ils excitent d'autres ondes de Rossby vers l'extérieur. Celles-ci se déstabilisent à leur tour et repoussent les ondes encore plus loin vers l'extérieur... (cf la figure 2.4). Ceci est relié à l'apparition, au fur et à mesure qu'augmente le forçage, d'un second maximum dans les fluctuations de vitesse, vers l'extérieur (cf la figure 2.5). Le vent zonal gagne aussi, dans une moindre proportion, l'extérieur de la sphère. On pourrait imaginer, pour un forçage encore plus grand, deux séries de cyclones/anticyclones associés à deux minima du vent zonal. Nous reviendrons sur cette question dans les prochains chapitres.



2.2 Couches limites et tailles des tourbillons

Nous proposons dans ce paragraphe de considérer deux études de cas: une simulation en eau très surcritique (écoulement E_1), une autre en gallium pas très loin du seuil (écoulement E_2). Leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau 2.1. A partir de ces deux simulations nous illustrerons différents comportements thermiques et les tailles caractéristiques que l'on est amené à croiser dans notre étude.

nom	P	E	R/R_c	m_c	Nu	\hat{U}_c	\hat{U}_ϕ^0
E_1	7.0	$6.50 \cdot 10^{-6}$	42.7	22	19.3	1723	573
E_2	0.025	$1.95 \cdot 10^{-6}$	3.0	13	1.3	44	106

TAB. 2.1 – *Caractéristiques des deux simulations à $\Omega = 300$ tpm: un écoulement E_1 très surcritique en eau, et un écoulement E_2 proche du seuil en gallium.*

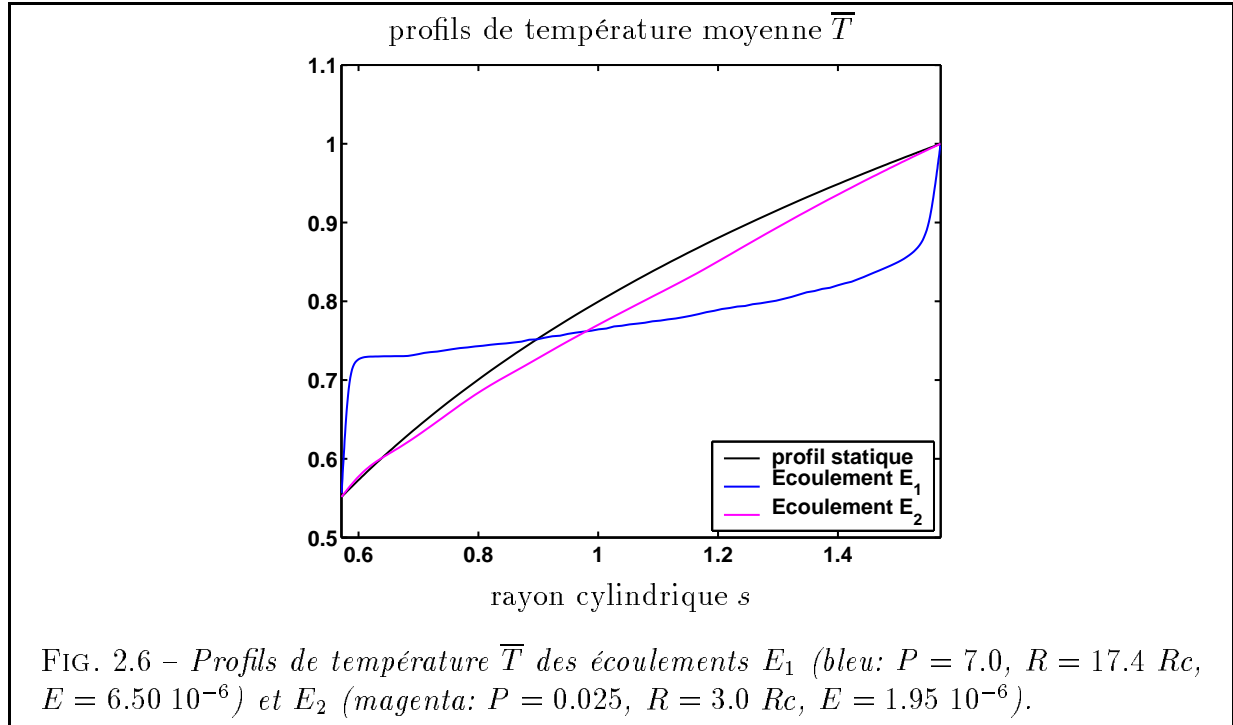
2.2.1 Comment caractériser le régime dynamique?

Il est intéressant de remarquer qu'il y a différentes manières de caractériser la turbulence de nos écoulements. La première consiste à regarder le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses, i.e. le nombre de Reynolds basé sur les vitesses convectives

$$Re = P^{-1} \hat{U}_c \quad (2.11)$$

On considère de manière classique qu'un écoulement est laminaire pour $Re < O(10^3)$ (plus ou moins suivant les cas, voir pour cela Godrèche and Manneville [1998]), et devient turbulent au dessus de cette valeur. C'est une façon de décrire de quelle manière on mélange la quantité de mouvement. De ce point de vue l'écoulement E_2 en gallium ($Re_2 = 1760$, i.e. 7.5 mm/s) est bien plus turbulent que l'écoulement E_1 en eau ($Re_1 = 246$, i.e. 3.5 mm/s), bien que l'on y soit plus proche du seuil, car la viscosité du gallium est trois fois plus faible que celle de l'eau.

Une autre approche consiste à regarder à quel point les mouvements mélangent la température. C'est ce qu'on fait quand on regarde le nombre de Nusselt. En effet pour $Nu \sim 1$ le profil moyen de température reste proche du profil statique, quand pour $Nu \gg 1$ naissent des couches limites thermiques, ce qui aplatit le gradient moyen de température dans le coeur du fluide. A ce petit jeu l'écoulement très surcritique E_1 en eau est un meilleur "mélangeur" que l'écoulement E_2 proche du seuil, comme le montrent les profils de température produits sur la figure 2.6. On peut à partir de tels profils déterminer la taille l_κ des couches limites thermiques. Ces dernières sont du même ordre que la taille du conteneur dans l'écoulement E_2 en gallium, où le champ de température diffuse beaucoup plus vite que le champ de vitesse. En eau elles sont associées à de fins panaches thermiques (voir les cartes de température de la figure 2.7).



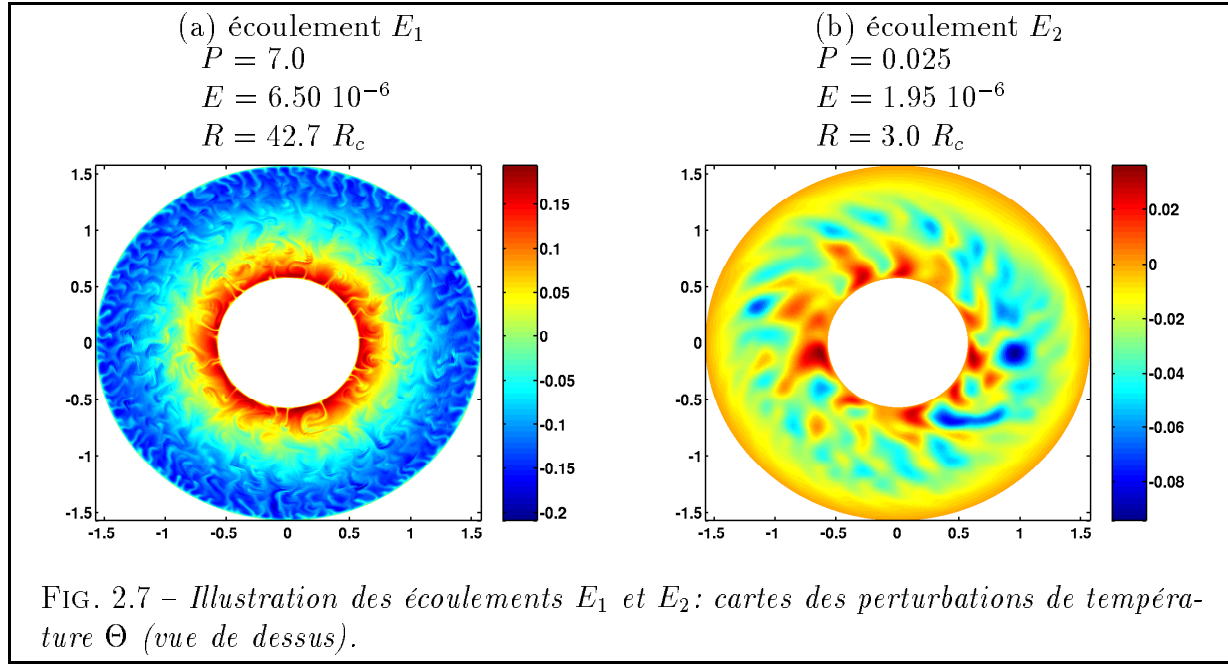
2.2.2 Evolution des couches limites thermiques

Pour les simulations loin du seuil on peut estimer l_κ à partir de l'équation (2.17) de la partie I, évaluée à travers la couche limite en s_i . Lorsque celle-ci est bien formée, le saut de température $\delta\Theta = [\bar{T}]_{s_i}^{s_i+l_\kappa}$ à travers la couche limite peut être évalué précisément. En considérant que le flux statique vaut $\frac{dT_s}{ds} \sim \frac{\Delta T}{d} = 1$ alors on peut évaluer le nombre de Nusselt ainsi:

$$Nu \sim \frac{\delta\Theta}{l_\kappa} \quad (2.12)$$

Nécessairement l'homogénéisation du profil moyen de température \bar{T} aux très grands forçages entraîne une saturation du saut de température $\delta\Theta$, comme le montre les figures 2.8 et 2.9a pour des simulations en eau à $E = 6.50 \cdot 10^{-6}$. Comme nous calculons Nu , il nous est alors possible d'évaluer l'épaisseur de la couche limite à partir de (2.12), ce que nous présentons dans la figure 2.9b.

On peut alors remarquer qu'aux très grands nombres de Rayleigh R/R_c (rapportés aux valeurs au seuil), comme dans les expériences à grand P de Sumita and Olson [2003], le nombre de Nusselt est une mesure directe de l'épaisseur des couches limites: $Nu \sim l_\kappa^{-1}$. Notons par ailleurs que les simulations très surcritiques présentent aussi des panaches thermiques à la paroi externe, associés à un fort gradient de température (voir les profils $\bar{T}(s)$ de la figure 2.8, et la carte de température Θ de la figure 2.7a), qui nous rapprochent de la convection duale suggérée par les expériences de Sumita and Olson [2003]. Cette



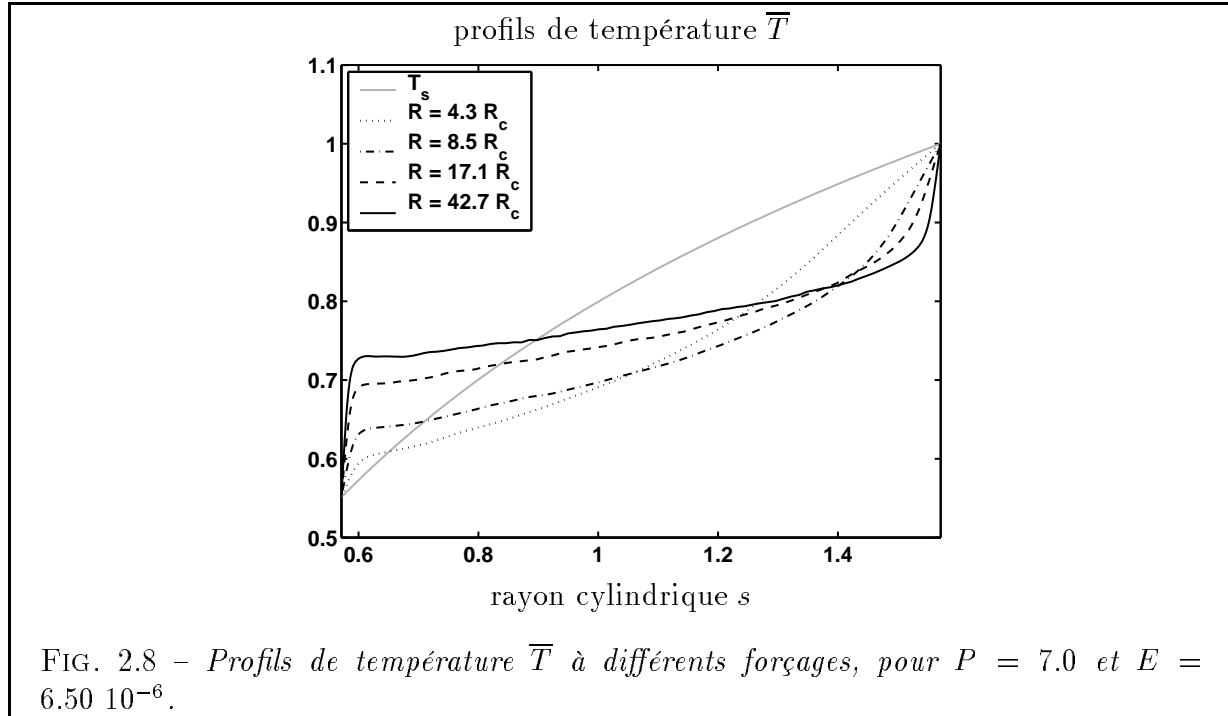
convection très surcritique pose un autre problème. En géométrie 3D (comme dans les expériences ou les planètes) les couches limites thermiques existent aussi sur la sphère externe.

Plaçons nous dans le cas de notre expérience (voir le chapitre 3.2.2). Si l'estimation QG de l'épaisseur l_κ est sensée, alors elle correspond à environ ~ 0.7 mm pour $R = 42.7 R_c$, ce qui peut se rapprocher de l'épaisseur des couches limites d'Ekman $l_\varepsilon \sim E^{1/2} L \sim 0.3$ mm pour $E = 6.50 \cdot 10^{-6}$). Peut-il alors exister une compétition entre les mécanismes thermiques de couche limite et la friction d'Ekman? C'est une des pistes que suggèrent les expériences de Brito et al. [2004], poursuivies par Bérangère Deleplace, qui montreraient une modification de la viscosité apparente en eau (fort R/R_c , faible Re) mais pas en gallium (faibles R/R_c , forts Re).

2.2.3 Considérations à partir de la taille des structures

Nous nous pencherons dans le prochain chapitre 2.3.1 sur le regard particulier qu'apporte une approche "thermique" du problème, avec le souci de relier le flux de chaleur aux mouvements. Avec Chris Jones, nous sommes partis sur cette piste en nous demandant comment les phénomènes évoqués plus haut gouvernaient - ou étaient esclaves - des tourbillons. Nous avons pour cela besoin de calibrer les vitesses convectives U_c et la taille des tourbillons L . Il nous faut au préalable distinguer d'autres tailles caractéristiques que l'on va rencontrer. Au seuil de convection (voir le chapitre 1) on définit la taille critique

$$l_c = 2\pi s_i / m_c$$



Nous considérons par ailleurs que la convection n'a pas nécessairement colonisé toute la sphère, et nous nommons L_c la largeur de la zone convective, zone dans laquelle on trouve des tourbillons. Notons que cette dernière est nécessairement plus grande que la taille critique, et qu'au seuil de convection elle dépend du mode de chauffage et des conditions aux limites (voir Jones et al. [2000] pour le chauffage interne, et Dormy et al. [2004] pour le chauffage différentiel). Nous distinguons enfin la taille \bar{L} associée au cisaillement du vent zonal \bar{U}_ϕ .

Au vu de la carte de température en eau de la figure 2.7 on s'aperçoit que même très loin du seuil le nombre de panaches reste proche du nombre d'onde critique m_c donné dans le tableau 2.1. Alors la taille L des tourbillons reste voisine de l_c même loin du seuil! Un raisonnement identique peut être suivi pour les simulations en gallium, où nous restons généralement plus près du seuil, mais avec de plus grandes valeurs de Re . Nous ne disons pas ici que la taille des tourbillons reste toujours celle du seuil quel que soit le forçage. Si la turbulence a tendance à augmenter légèrement L , cette augmentation est freinée, et en particulier L n'arrive pas à suivre l'échelle de Rhines. Nous ne pensons pas que ce résultat soit général dans les simulations QG, mais plutôt une conséquence particulière de la géométrie sphérique. En effet le paramètre de Coriolis augmente avec le rayon dans une sphère, ce qui rend l'extension radiale plus difficile que dans le cas d'un plan β de pente constante. Notons aussi que dans la gamme de paramètres explorée dans cette étude ($E \sim O(10^{-6})$, $U_c \sim 10^2$, $P = 0.025$ ou 7.0) il est difficile de dissocier radicalement l'amplitude de l'échelle de Rhines $\sim O([EU_c/P]^{1/2})$ de la taille critique $\sim O(E_P^{1/3})$. Ce que montrent nos simulations QG, c'est que l'évolution de L est trop faible pour satisfaire

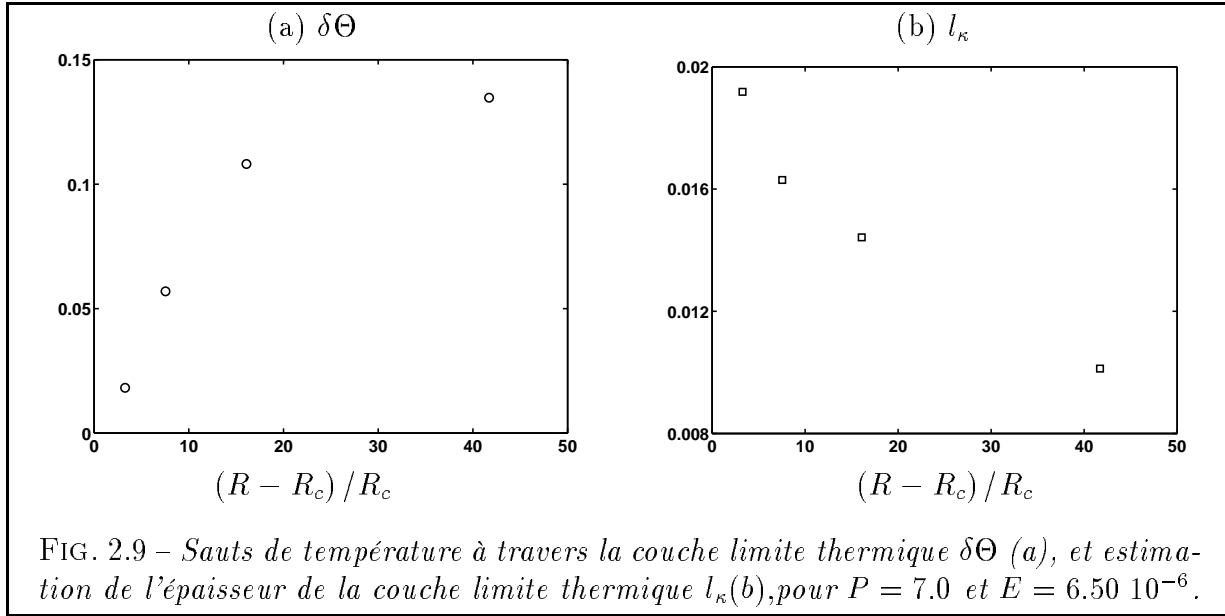


FIG. 2.9 – Sauts de température à travers la couche limite thermique $\delta\Theta$ (a), et estimation de l'épaisseur de la couche limite thermique l_κ (b), pour $P = 7.0$ et $E = 6.50 \cdot 10^{-6}$.

l'échelle de Rhines bâtie sur les vitesses \hat{U}_c .

Nous visons dans le chapitre suivant à quantifier ces phénomènes à l'aide d'un développement non-linéaire basé sur les processus thermiques. Les différents points abordés jusqu'à présent font apparaître, dans un cas particulier, un lien intéressant entre les caractéristiques physiques du fluide et la dynamique des objets géophysiques que l'on cherche à comprendre. La diversité observée dans le bestiaire des planètes peut découler de la complexité de ce lien. On peut par exemple ouvrir aux questions suivantes: quel type de convection (compositionnelle, thermique, les deux)?, quelles conditions aux limites? (nous imposons un flux de chaleur ou la température?), quelle histoire thermique?, quel nombre de Prandtl?, quelles diffusivités turbulentes (Brito et al. [2004])...

2.3 Développement non-linéaire à partir du seuil

Plusieurs études ont abordé la dynamique faiblement non-linéaire de notre problème, qui mettent en valeur l'établissement du vent zonal à partir du tenseur de Reynolds (Busse and Or [1986]). Nous présentons tout d'abord dans cette section un développement non-linéaire élaboré en collaboration avec Chris Jones, adapté au cas où le nombre de Prandtl est grand. Le raisonnement consiste à extrapoler un développement faiblement non-linéaire, théoriquement valable dans la limite $R/R_c - 1 \ll 1$, dans le cas où le rapport R/R_c devient grand. Nous oublierons momentanément les non-linéarités dynamiques - le tenseur de Reynolds. Dès lors nous nous placerons dans le cas où la contribution du vent zonal reste faible.

Nous reviendrons ensuite sur le cas de la convection proche du seuil à faible P , à partir des études de Herrmann and Busse [1997], et plus particulièrement de Plaut and Busse [2002], qui mettent l'accent sur l'importance du vent zonal et le caractère intermittent de la convection faiblement non-linéaire. Enfin nous nous pencherons sur la convection développée à faible P , où l'impact du vent zonal devient à nouveau différent.

2.3.1 Convection non-linéaire à grand Prandtl

Développement non-linéaire "thermique"

Le système à considérer est alors constitué de l'équation de la chaleur, associée à la composante non-axisymétrique de l'équation de vorticité, dans laquelle on enlève le terme non-l naire. Repartons pour cela des équations $(2.19)_I$ et $(2.25)_I$. Cette dernière équation peut s'écrire

$$\left[\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_e \right] \zeta_c + \frac{2\eta}{EH} u_s + \frac{E^{-1/2}}{H} P_u(\mathbf{u}_c) = R \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \phi} \quad (2.13)$$

On isole la partie axisymétrique $\overline{(2.19)_I}$ de l'équation de la chaleur, que l'on exprime ici à travers le nombre de Nusselt défini dans $(2.17)_I$:

$$(Nu - 1) \frac{dT_s}{ds} = \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial s} - \overline{u_s \hat{\Theta}} \quad (2.14)$$

La partie non-axisymétrique $(2.19)_I - \overline{(2.19)_I}$ de l'équation de la chaleur nous donne alors l'évolution de $\hat{\Theta}$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_e \right] \hat{\Theta} = -u_s \left[\frac{dT_s}{ds} + \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial s} \right] - \left[\mathbf{u}_e \cdot \nabla_e \hat{\Theta} - \overline{\mathbf{u}_e \cdot \nabla_e \hat{\Theta}} \right] \quad (2.15)$$

Le but est alors de décrire l'amplitude des solutions du système (2.13 - 2.14 - 2.15) quand on s'écarte du seuil de convection. De même que dans le chapitre 2.3 de la partie I, nous utilisons la fonction courant ψ définie dans l'équation $(2.3)_I$ pour décrire ζ_c et \mathbf{u}_c . L'équation (2.13) décrite ci-dessus est linéaire. En utilisant la décomposition spectrale $(2.27)_I$ pour $\hat{\Theta}$ et ψ , on peut la mettre sous la forme

$$\Gamma_m \psi_m = R \hat{\Theta}_m \quad \forall m \neq 0 \quad (2.16)$$

avec $\Gamma_m = \Gamma_{rm} + i\Gamma_{im}$ et $(\Gamma_{rm}, \Gamma_{im}) \in \mathcal{R}^2$. On note Γ_m^* le conjugué de Γ_m , avec $\Gamma_m \Gamma_m^* = |\Gamma_m|^2$. Avant d'aller plus loin, notons que l'approche présentée ici est le résultat d'une tentative d'estimation locale des fonctions ψ et θ . Elle est fondée sur l'idée sous-jacente (motivée par nos observations numériques et expérimentales) que la convection prend place principalement près du cylindre tangent. Cette approche gagnerait certainement à être plus

formalisée. En particulier il serait plus juste de considérer les opérateurs (Γ , etc.) comme dépendants de s .

Au vu de l'illustration de la convection développée faite dans le chapitre précédent, il semble raisonnable de considérer que les fluctuations de températures $\hat{\Theta}$ sont dominées par un mode proche du mode critique $m \simeq m_c$, ce que l'on écrit

$$\hat{\Theta} \simeq \hat{\Theta}_m$$

avec $\hat{\Theta}_m \hat{\Theta}_m^* = |\hat{\Theta}_m|^2$. Nous noterons par la suite

$$\Delta_e = -\frac{1}{\Sigma}$$

avec $\Sigma > 0$. Par ailleurs la vitesse radiale s'écrit

$$u_{sm} = -\frac{im}{s}\psi_m$$

Par souci de clarté, nous omettrons par la suite les indices m pour les fonctions $\hat{\Theta}_m$, ψ_m et Γ_m . L'équation (2.15), couplée à (2.16), se simplifie alors pour donner

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\Sigma} \right] \Gamma \psi \simeq \frac{imR}{s} \psi \left[\frac{dT_s}{ds} + \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial s} \right] + \frac{im}{s} \overline{u_\phi} \hat{\Theta}$$

En d'autres termes, nous considérons dans ce développement que les non-linéarités dans l'équation de la chaleur ne proviennent que du couplage entre le mode m et le mode axisymétrique. Dans le cas des grands Prandtl, le vent zonal est faible. On peut alors négliger la contribution de $\overline{u_\phi}$ à l'équation de la chaleur devant celle de $\bar{\Theta}$, pour obtenir

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\Sigma} \right] \Gamma \psi \simeq \frac{imR}{s} \psi \left[\frac{dT_s}{ds} + \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial s} \right] \quad (2.17)$$

Nous estimons les non-linéarités de cette équation à partir de (2.14); il me faut au préalable calculer

$$\overline{u_s \hat{\Theta}} = -\frac{im}{s} [\psi \hat{\Theta}^* - \psi^* \hat{\Theta}]$$

On peut vérifier, à partir de (2.16), que $R\hat{\Theta}^* = \Gamma^* \psi^*$. Alors

$$\overline{u_s \hat{\Theta}} = -\frac{2m\Gamma_i}{sR} |\psi|^2$$

L'équation (2.14) nous permet alors d'estimer le gradient de la perturbation de température:

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial s} = (Nu - 1) \frac{dT_s}{ds} - \frac{2m\Gamma_i}{sR} |\psi|^2 \quad (2.18)$$

En multipliant (2.17) par $\Sigma \frac{\Gamma^*}{|\Gamma|^2}$, puis en y incorporant (2.18), nous finissons par obtenir

$$\left[\Sigma \frac{\partial}{\partial t} - \left(1 + i \frac{\Gamma_r}{\Gamma_i} \right) \frac{mQ\Sigma\Gamma_i}{|\Gamma|^2} RNu + 1 \right] \psi \simeq - \left(1 + i \frac{\Gamma_r}{\Gamma_i} \right) \frac{\Gamma_i^2}{|\Gamma|^2} \frac{2m^2\Sigma}{s^2} |\psi|^2 \psi \quad (2.19)$$

avec $Q = \frac{1}{s} \frac{dT_s}{ds}$. Intéressons nous à la composante linéaire (le membre de gauche) de (2.19). Si on se place au seuil, alors le nombre de Nusselt vaut 1. La partie imaginaire $\mathcal{Im}(2.19)$ nous donne la pulsation de l'onde de Rossby thermique ω comme une fonction du nombre d'onde. La partie réelle $\mathcal{Re}(2.19)$ fait alors apparaître le nombre de Rayleigh R en fonction de m . Le mode critique m_c est alors la solution de $\frac{\partial R}{\partial m} = 0$. En intégrant alors ce mode dans $\omega(m)$ et $R(m)$, on obtient les résultats analytiques présentés dans le paragraphe 1.1.2. Si l'on considère m comme étant le mode critique, alors le nombre de Rayleigh critique s'écrit ici

$$R_c = \frac{|\Gamma|^2}{mQ\Sigma\Gamma_i} \quad (2.20)$$

Par ailleurs nous pouvons estimer le facteur Σ en fonction de m . Si l'on considère que l'extension radiale des tourbillons est semblable à la taille azimutale, (i.e. que les tourbillons sont circulaires, comme le suggèrent les simulations présentées dans la section précédente, ainsi que l'étude du seuil en chauffage interne par Jones et al. [2000]), on peut estimer

$$\Sigma \simeq -\Delta_e^{-1} \sim \frac{s^2}{2m^2} \quad (2.21)$$

L'équation aux amplitudes (2.19) se met alors sous la forme

$$\left[\Sigma \frac{\partial}{\partial t} - p(1 + ir) \right] \psi \simeq -q(1 + ir) |\psi|^2 \psi \quad (2.22)$$

avec p le paramètre de contrôle défini comme

$$p = \frac{R}{R_c} Nu - 1$$

et les rapports $r = \Gamma_r/\Gamma_i$ et $q = \Gamma_i^2/|\Gamma|^2 > 0$. Cette équation décrit une bifurcation supercritique (voir Manneville [1990]), qui nous donne l'évolution de l'enveloppe $|\psi|$ avec le paramètre de contrôle p :

$$|\psi| \simeq \sqrt{\frac{p}{q}} \quad (2.23)$$

On peut par ailleurs estimer, à partir de (2.13) et des résultats (1.2) de l'étude linéaire, que les parties réelles et imaginaires du paramètre Γ tendent asymptotiquement vers des valeurs semblables pour $E \rightarrow 0$. Alors on peut grossièrement estimer

$$|\psi| \simeq \sqrt{2p}$$

Nous tenons à rappeler ici que nous avons fait beaucoup de considérations d'ordre de grandeur pour arriver jusqu'ici, notamment concernant la taille des structures. Notre description non-linéaire n'est alors pas rigoureusement exacte, d'autant qu'il existe tout un bestiaire de bifurcations que nous n'avons pas passées en revue. Cependant notre approche, inspirée de nos observations numériques, peut tout de même nous indiquer quelques tendances.

Mise à l'échelle des vitesses convectives

Nous avons défini plus haut l'amplitude \hat{U}_s de la composante radiale des vitesses dans la zone convectives, que l'on peut relier à la fonction courant à partir de (2.3):

$$\hat{U}_s \sim \frac{m}{s} |\psi|$$

Nous considérons ici encore la taille caractéristique

$$L \simeq \frac{2\pi s}{m_c} \quad (2.24)$$

A priori ce choix ne semble justifié que proche du seuil de convection. Cependant, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.2, il semble que cette taille donne un ordre de grandeur assez satisfaisant même en convection très développée. Nous définissons à partir de la taille L le nombre de Peclet local, basé sur la vitesse radiale:

$$Pe_l = \hat{U}_s L \quad (2.25)$$

On peut alors déduire du paragraphe précédent l'évolution de Pe_l avec p :

$$Pe_l \simeq 2\pi\sqrt{2}p^{1/2} \sim Pe_l \simeq 8.9p^{1/2} \quad (2.26)$$

Cette mise à l'échelle est testée pour nos simulations QG à $P = 7.0$ et deux nombres d'Ekman différents sur la figure 2.10a. On peut remarquer un très bon accord tant sur l'exposant $1/2$ que sur le préfacteur: une régression logarithmique sur les simulations à $E = 2.44 \cdot 10^{-6}$ donne

$$Pe_l \simeq (8.64 \pm 0.52) p^{0.51 \pm 0.01}$$

L'impact de la rotation dans cette échelle se retrouve dans l'estimation du seuil de convection (via la taille L et le nombre R_c). Le rôle des non-linéarités thermiques semble donc prépondérant pour ces simulations à large P . Par ailleurs une estimation de la taille à l'aide de la taille critique semble convenir, même très loin du seuil, ce qui nous éloigne dans ce cas de l'échelle de Rhines et de l'équilibre inertiel. Notons que l'exposant $1/2$ est proche de l'exposant $2/5$ de l'échelle inertielle. Pour un nombre de Prandtl donné il est alors difficile de discriminer les deux échelles en ne considérant que les vitesses observées. Pour distinguer entre les deux échelles, soit on garde un forçage constant et on joue sur une grande gamme de nombre d'Ekman, soit on fixe la rotation et on augmente le forçage, mais en analysant non seulement les vitesses mais aussi la taille des structures.

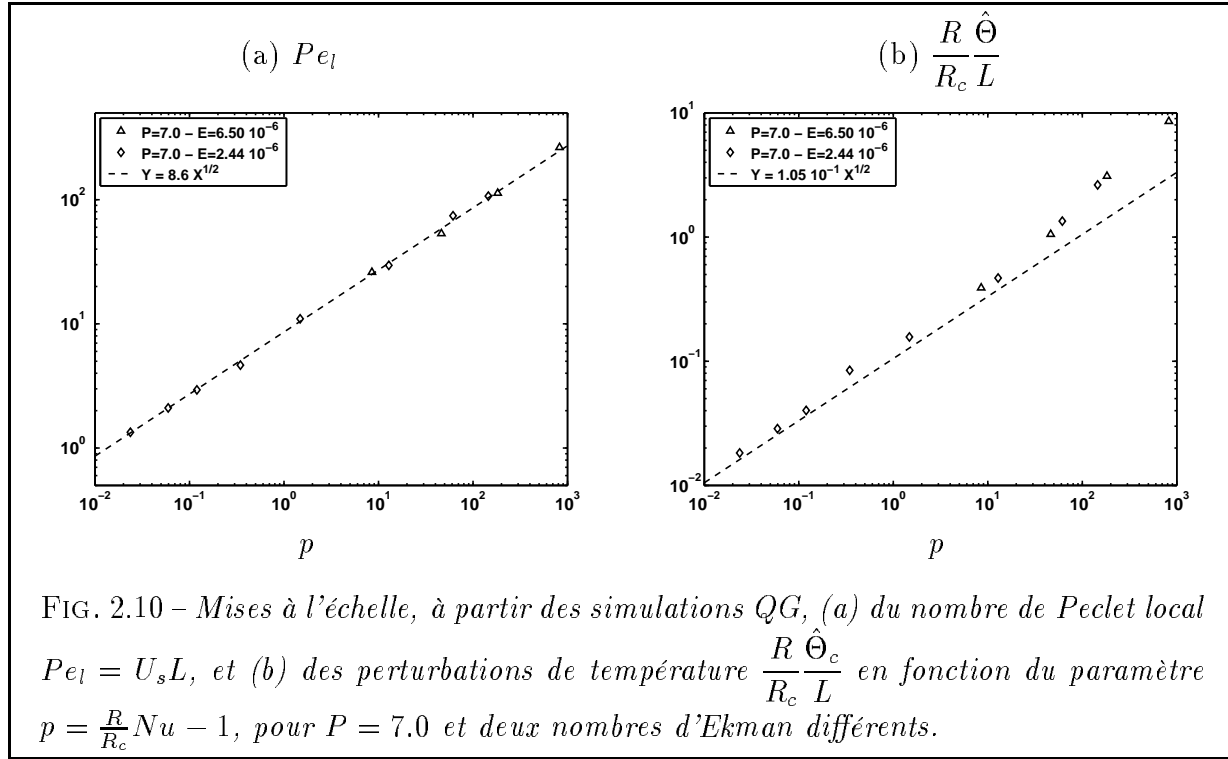


FIG. 2.10 – Mises à l'échelle, à partir des simulations QG, (a) du nombre de Peclet local $Pe_l = U_s L$, et (b) des perturbations de température $\frac{R}{R_c} \frac{\hat{\Theta}_c}{L}$ en fonction du paramètre $p = \frac{R}{R_c} Nu - 1$, pour $P = 7.0$ et deux nombres d'Ekman différents.

Mise à l'échelle des fluctuations de températures

Nous pouvons de la même manière estimer la mise à l'échelle des fluctuations de température. En multipliant (2.16) par $\hat{\Theta}^*$ on obtient

$$R^2 |\Theta|^2 = |\Gamma|^2 |\psi|^2$$

A partir de (2.23), si l'on considère que $\hat{\Theta}_c$ est une bonne mesure de $|\Theta|$, on obtient alors

$$R \hat{\Theta}_c = \frac{|\Gamma|^2}{\Gamma_i} p^{1/2}$$

En reprenant alors l'expression (2.20) du nombre de Rayleigh critique cela donne

$$\frac{R}{R_c} \hat{\Theta}_c \simeq m Q \Sigma p^{1/2}$$

En reprenant les estimations (2.21) et (2.24) pour Σ et L il vient finalement

$$\frac{R}{R_c} \frac{\hat{\Theta}_c}{L} \simeq \frac{1}{4\pi} \frac{dT_s}{ds} p^{1/2}$$

Cette mise à l'échelle fait finalement ressortir le gradient latéral de température. Ce n'est pas étonnant puisque c'est ce même gradient qui intervient dans l'équation de vorticité

(2.13). Pour obtenir un ordre de grandeur du préfacteur, on estime le gradient de température statique en s_i . Alors on arrive à l'approximation suivante

$$\frac{R}{R_c} \frac{\hat{\Theta}_c}{L} \simeq 3.5 \cdot 10^{-2} p^{1/2} \quad (2.27)$$

C'est ce que nous testons sur la figure 2.10b. La pente $1/2$ issue de la loi d'échelle correspond très bien aux simulations QG jusqu'à $p \simeq O(20)$. Ensuite on observe une dérive, qui peut s'expliquer par notre façon d'estimer les fluctuations de températures. En effet pour les simulations très surcritiques, l'amplitude de $\hat{\Theta}_c$ présente un pic dans les couches limites. Or la convection a alors gagné toute la sphère, et ce pic surestime les fluctuations de température dans la zone convective. Il existe aussi un facteur de l'ordre de 3 entre le préfacteur théorique de la mise à l'échelle (2.27) et celui donné par simulations numériques, pour lequel nous n'avons pas d'explication.

2.3.2 Dynamique "mixte" à faible P

Ce cas a été étudié dans le cas de conditions aux limites de surface libre par Herrmann and Busse [1997], qui insistent sur le caractère intermittent de la convection. Plaut and Busse [2002] ont repris ce problème en intégrant des conditions aux limites de non-glissement. Ils développent une approche faiblement non-linéaire ($R/R_c - 1 \ll 1$) en insistant sur l'importance des non-linéarités issues du vent zonal. Nous ne rappelons ici que les grandes lignes de leur approche, en illustrant quelques phénomènes particuliers à la convection faiblement non-linéaire, avant de revenir sur la convection développée.

Approche faiblement non-linéaire

Le développement faiblement non-linéaire effectué par Plaut and Busse [2002] prend en compte les non-linéarités dynamiques (i.e. ils ne négligent pas $\overline{u_\phi}$ comme nous l'avons fait), ce qui amène à considérer, à la place de l'équation (2.22), une équation aux amplitudes de la forme suivante:

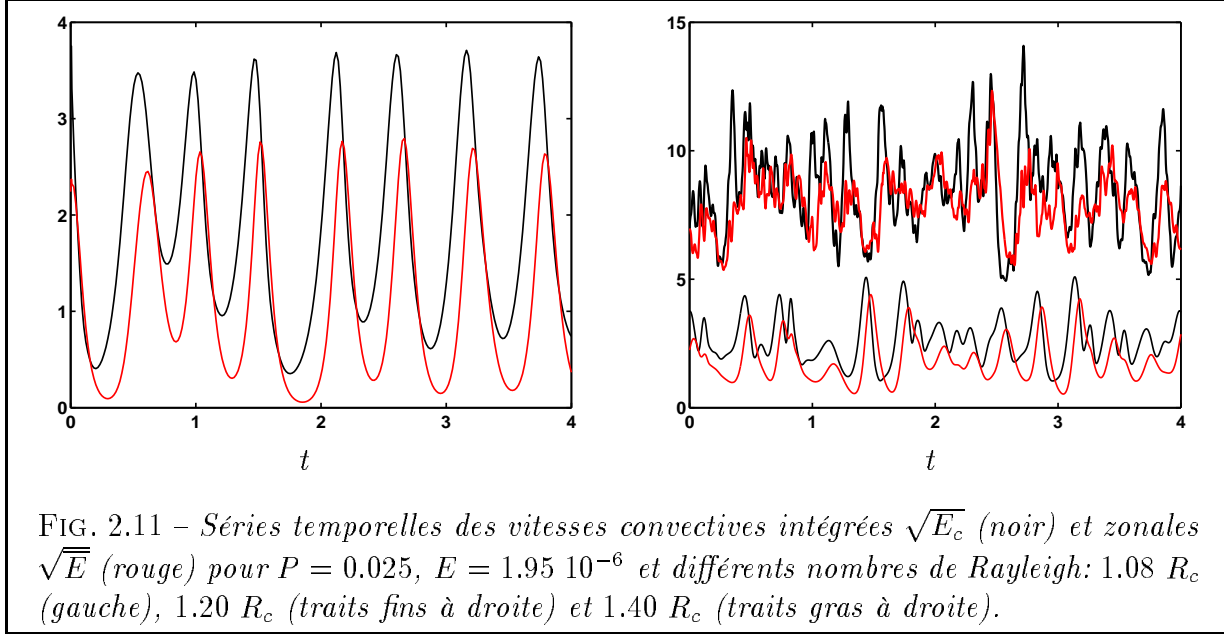
$$\left[\Sigma \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon (1 + is) \right] \psi = -\gamma (1 + ic) |\psi|^2 \psi \quad (2.28)$$

avec $\varepsilon = R/R_c - 1 \ll 1$ et $\gamma (1 + ic) = q_\kappa (1 + ir_\kappa) + q_\nu (1 + ir_\nu)$. Le terme q_κ provient des non-linéarités thermiques ($\mathbf{u} \cdot \nabla_e \Theta$), et est prépondérant à grand Prandtl. Le terme q_ν découle de la présence d'un fort vent zonal à faible P . Ce vent zonal provient du tenseur de Reynolds - cf l'équation (2.26) - et présente donc une évolution quadratique pour un écoulement pas trop turbulent (i.e. pas trop loin du seuil). Le coefficient de saturation est

alors $\gamma = q_\kappa + q_\nu > 0$, et l'équation (2.28) décrit une bifurcation supercritique, dont la solution complexe s'écrit:

$$\psi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}} e^{-i\Delta\omega t}$$

avec $\Delta\omega = (c - s)\varepsilon$. Ce déphasage, spécifique aux conditions aux limites de non-glissement, correspond à un ralentissement de l'onde de Rossby (prograde) à cause de la présence du vent zonal (rétrograde).

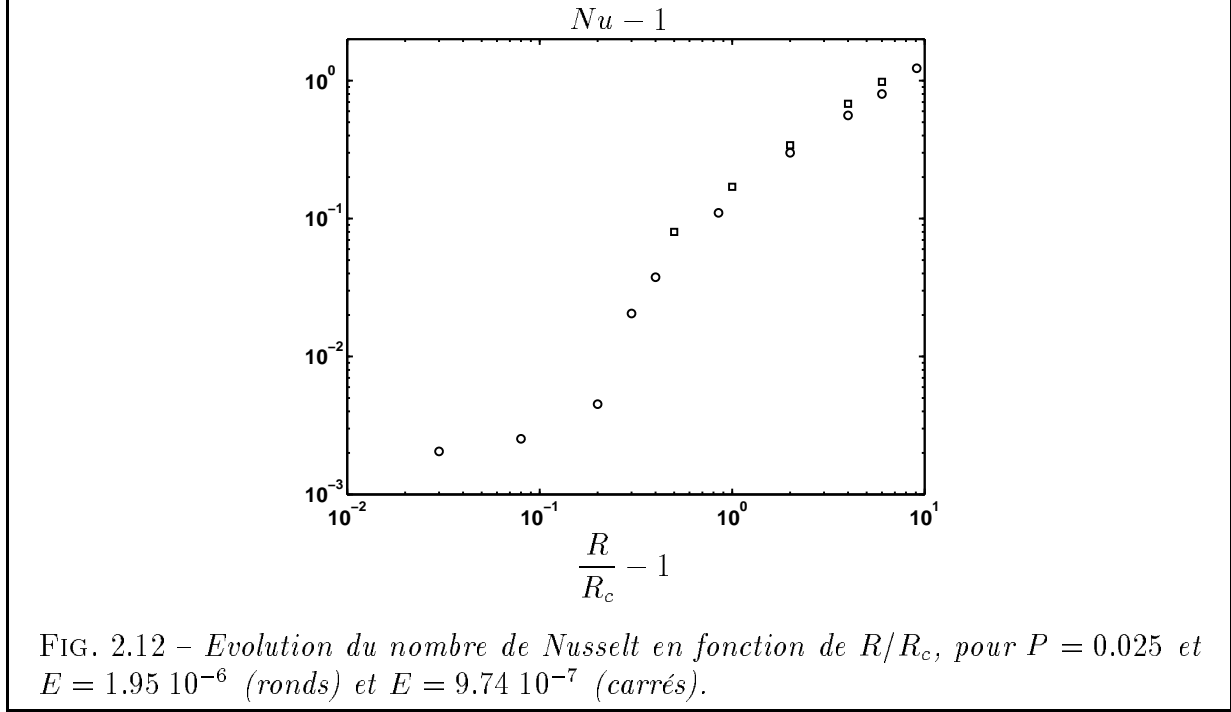


Les simulations numériques légèrement surcritiques à faible P présentent des caractéristiques particulières. Les études de stabilité en convection légèrement surcritique (voir Or and Busse [1987], Schnaubelt and Busse [1992], Herrmann and Busse [1997] puis Plaut and Busse [2002]) ont fait apparaître différents types d'instabilités, suivant les valeurs des paramètres E et P , au fur et à mesure que les modes voisins du mode critique viennent perturber la croissance de l'instabilité. Plusieurs caractéristiques, spécifiques des faibles P , ressortent:

1. en augmentant le nombre de Rayleigh à partir du seuil, le vent zonal devient partie prenante dans la convection. Du fait de l'excitation de plusieurs modes celle-ci présente alors une modulation d'amplitude. Cette instabilité est ensuite remplacée par une autre oscillation, présentant d'importantes fluctuations temporelles de l'amplitude ("resonance instability"). Ce caractère disparaît aux plus forts R , quand la convection devient chaotique, ce qu'illustrent les séries temporelles de la figure 2.11 obtenues avec notre code QG. Pour une description plus approfondie de ce comportement, toujours dans le cadre de l'approche QG, on pourra se référer à Morin and

Dormy [2004].

2. Associée à ce phénomène, les simulations de Plaut and Busse [2002] (conditions de non-glissement) présentent une stabilisation des ondes, ce qui amène une évolution singulière du nombre de Nusselt avec R . C'est ce qu'illustre l'inflexion de la courbe $Nu - 1$ en fonction de $R/R_c - 1$ présentée sur la figure 2.12.



Convection développée et saturation du vent zonal

A faible P la dissipation de couche limite, par l'intermédiaire de la friction d'Ekman, domine largement la dissipation volumique (paragraphe 2.4). L'équation $(2.26)_I$ du vent zonal suggère alors, comme c'est fait dans l'équilibre inertiel, d'équilibrer la friction d'Ekman avec le tenseur de Reynolds. Lorsque le forçage devient grand et l'écoulement turbulent il advient, comme le fait remarquer Christensen [2002] pour des simulations 3D, une perte de corrélation dans le tenseur de Reynolds. L'estimation quadratique (2.6) du vent zonal, utilisée dans l'équilibre inertiel, amène alors à surestimer l'énergie versée dans le mode axisymétrique par les non-linéarités. Nous proposons ici d'atténuer ce problème en estimant

$$\overline{u_e \cdot \nabla_e u_\phi} \sim \frac{(\hat{U}_c)^x}{L}$$

avec $x < 2$. Nous n'avons pas vraiment d'interprétation physique pour affirmer qu'une telle évolution est juste. Nous allons tout de même la tester dans ce paragraphe pour apporter

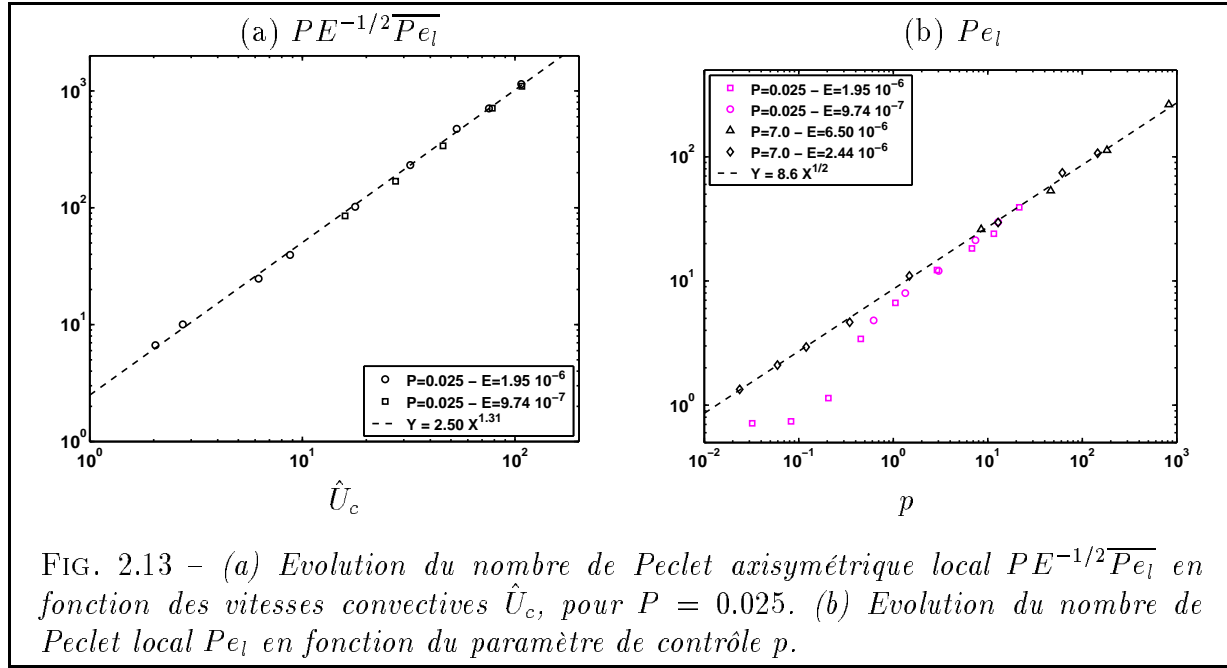


FIG. 2.13 – (a) Evolution du nombre de Peclet axisymétrique local $PE^{-1/2} \overline{Pe_l}$ en fonction des vitesses convectives \hat{U}_c , pour $P = 0.025$. (b) Evolution du nombre de Peclet local Pe_l en fonction du paramètre de contrôle p .

une estimation de l'amplitude du vent zonal obtenu par nos simulations QG. L'estimation (2.6) est dans ce cas remplacée par

$$PE^{-1/2} \hat{U}_\phi^0 L \sim (\hat{U}_c)^x$$

Si l'on note

$$\overline{Pe_l} = \hat{U}_\phi^0 L$$

le nombre de Peclet axisymétrique local, alors on obtient:

$$PE^{-1/2} \overline{Pe_l} \sim (\hat{U}_c)^x$$

C'est ce que nous testons sur la figure 2.13a pour les simulations QG à $P = 0.025$, où une régression linéaire nous donne

$$PE^{-1/2} \overline{Pe_l} \sim (2.50 \pm 0.18) \hat{U}_c^{1.31 \pm 0.04} \quad (2.29)$$

On peut en déduire que le caractère particulier de la dynamique faiblement non-linéaire pour $P \ll 1$ va disparaître quand on atteint un régime de convection développée. En effet l'impact du vent zonal sur le coefficient de saturation γ s'efface à mesure que le vent zonal passe de $\hat{U}_\phi^0 \propto \psi^2$ à $\hat{U}_\phi^0 \propto \psi^{1.3}$. La convection développée rejoint alors la branche de saturation calculée à grand nombre de Prandtl, comme le montre la figure 2.13b.

Il est important de noter que si la mise à l'échelle des vitesses convectives loin du seuil ne fait plus intervenir la force inertielle, on ne peut pas pour autant oublier celle-ci. En effet, sans

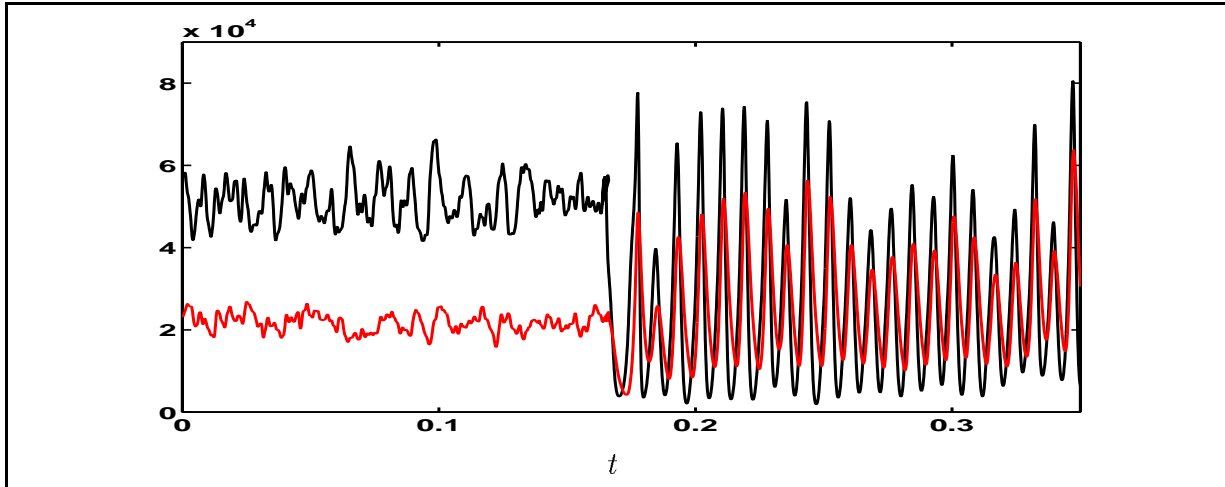


FIG. 2.14 – Série temporelle des énergies E_c (noir) et \overline{E} (rouge) pour $E = 2.44 \cdot 10^{-6}$ et $P = 0.3$. Le terme non-linéaire de la composante non-axisymétrique de l'équation de vorticité (2.20) est enlevé à $t \simeq 0.17$.

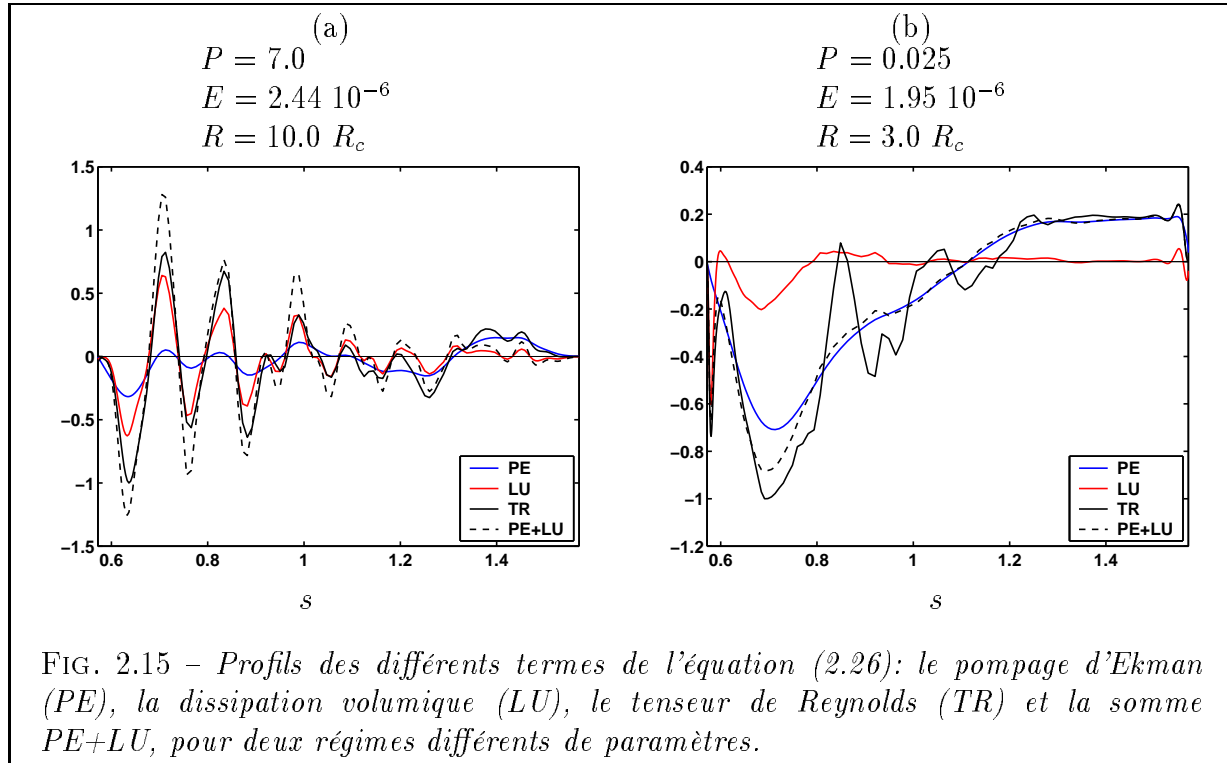
elle, il n'existe plus aucune source de vent zonal. La composante non-axisymétrique de la force inertielle assure quant à elle le mélange nécessaire à la décorrélation du terme $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$. C'est grâce à elle que la transition vers une dynamique chaotique se fait. C'est ce qu'illustre la figure 2.14 où l'on peut comparer les séries temporelles des énergies convectives et zonales pour $P = 0.3$, $E = 2.44 \cdot 10^{-6}$ et $R = 5 R_c$, suivant que la composante non-axisymétrique du tenseur de Reynolds est incluse ou non dans le code QG. On peut noter que sans la présence de ce terme, on reste même loin du seuil dans un régime similaire à celui des "resonance instability" décrit plus haut. La présence des non-linéarités dynamiques est donc cruciale à faible P , puisque ce sont finalement elles qui permettent de sortir d'une dynamique contrôlée par le vent zonal pour $R/R_c - 1 \ll 1$ à une dynamique contrôlée par la thermique en convection développée.

2.4 Quelques particularités du vent zonal

On a vu dans le paragraphe 2.2 que le nombre de Prandtl influençait la structure thermique de la convection développée - en particulier avec la présence ou non de couches limites thermiques - et que le nombre de Reynolds ne suffisait pas à caractériser la turbulence. Nous allons ici détailler une autre différence de comportement très dépendante de P : la structure et l'évolution du vent zonal.

2.4.1 Origine et évolution du vent zonal

Si le vent zonal prend son origine dans la composante axisymétrique de la force inertielle, (voir l'équation (2.26)_I), l'hypothèse selon laquelle ce dernier est équilibré par la friction d'Ekman, suivie dans l'équilibre inertiel, n'est pas si évidente. C'est déjà ce que suggéraient les estimations de la section 1.2, où l'on a vu que le mode de dissipation est fortement dépendant de P . Ce point est confirmé pour le cas particulier du vent zonal par les profils présentés en figure 2.15: comme on le pressentait, le tenseur de Reynolds est majoritairement équilibré par la dissipation volumique en eau ($P = 7.0$, figure 2.15a), et par la friction d'Ekman en gallium ($P = 0.025$, figure 2.15b), excepté dans les couches limites visqueuses en s_i .



Vent zonal en convection faiblement non-linéaire

En convection faiblement non-linéaire, ce que nous avons vu plus haut ne change pas le fait que l'on s'attende à une évolution quadratique du vent zonal. Ainsi:

1. pour $P \ll 1$, on s'attend à avoir un équilibre entre tenseur de Reynolds et pompage d'Ekman:

$$PE^{-1/2} \hat{U}_\phi^0 \propto \frac{(\hat{U}_c)^2}{L}$$

En notant $\overline{Re_l} = \overline{Pe_l}/P$ le nombre de Reynolds local axisymétrique, on peut mettre cette estimation sous la forme

$$E^{-1/2} \overline{Re_l} \propto Re^2 \quad (2.30)$$

2. pour $P \gg 1$, on s'attend à avoir un équilibre entre tenseur de Reynolds et dissipation volumique

$$P \frac{\hat{U}_\phi^0}{L^2} \propto \frac{(\hat{U}_c)^2}{L}$$

En considérant encore une fois la taille critique on obtient (puisque $l_c \sim E^{1/3}$ pour de grands nombres de Prandtl)

$$E^{-2/3} \overline{Re_l} \propto Re^2 \quad (2.31)$$

Encore une fois, pour les nombres d'Ekman de l'ordre de $O(10^{-6})$, $E^{-2/3}$ reste proche de $E^{-1/2}$ (à un facteur 10 près). Il est alors difficile de dissocier les préfacteurs issus des deux modes de dissipation. Cette évolution quadratique est effectivement observée à $P = 7.0$ et $P = 0.3$ aux faibles forçages, comme le montre la figure 2.16 où l'on teste la mise à l'échelle (2.30).

Vent zonal en convection développée

Par contre quand la convection devient trop turbulente, le vent zonal change de dynamique, et passe d'une évolution quadratique à une évolution saturée $Re_l \propto Re^x$, avec $x < 2$. Exceptées peut-être les simulations les plus proches du seuil, toutes nos simulations QG à $P = 0.025$ se trouvent dans ce cas. L'étude du vent zonal à faible P , présentée dans le paragraphe 2.3.2, nous indiquait

$$\overline{(\mathbf{u}_c \cdot \nabla_e) u_\phi} \propto \frac{(\hat{U}_c)^x}{L}$$

avec $x \simeq 1.3$. Il est intéressant de constater que cet exposant semble convenir aussi pour les simulations à $P = 7.0$ et $P = 0.3$, comme le montre la figure 2.16. Par contre le changement de régime n'a pas lieu pour la même valeur de Re . Ceci dépend comme précédemment du mode de dissipation, ce qui est difficile à distinguer pour $E = O(10^{-6})$, mais aussi du nombre de Prandtl. En effet, en choisissant $x = 1.3$, les évaluations (2.30) et (2.31) deviennent:

1. pour $P \ll 1$: $P^{0.7} E^{-1/2} \overline{Re_l} \propto Re^{1.3}$
2. pour $P \gg 1$: $P^{0.7} E^{-2/3} \overline{Re_l} \propto Re^{1.3}$

On s'attend donc globalement à avoir un vent zonal d'autant plus faible que P est grand. Ce point explique en partie la différence observée entre les préfacteurs en convection développée sur la figure 2.16.

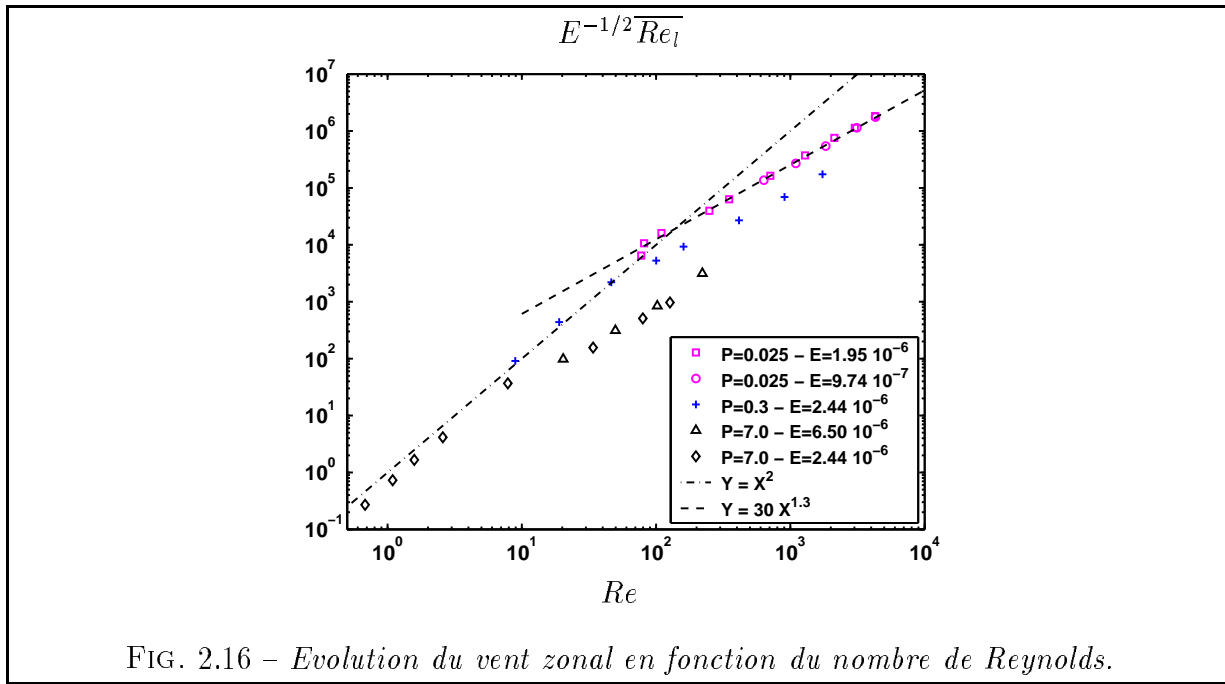
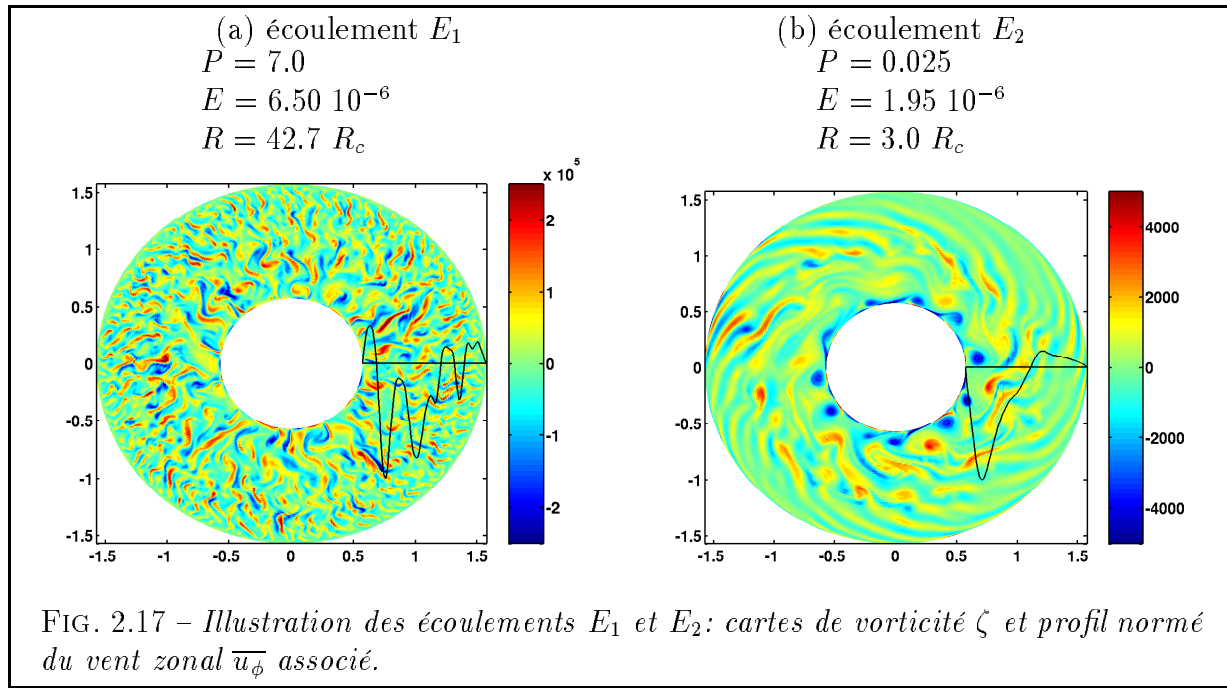


FIG. 2.16 – Evolution du vent zonal en fonction du nombre de Reynolds.

2.4.2 Jets multiples et taille des tourbillons

Concernant la structure du vent zonal, on a déjà noté dans la section 2.1.3 qu'à partir du moment où celui-ci devient grand - quand sa contribution $\bar{\zeta}$ à la vorticité domine celle des vitesses convectives ζ_c - il définit la distribution dominante des cyclones et des anticyclones. C'est ce que montrent les cartes de vorticité des écoulements précédemment décrits E_1 (en eau) et E_2 (en gallium) de la figure 2.17:

1. En gallium (Prandtl faible), le vent zonal très intense près du cylindre tangent est associé à un anneau d'anticyclones à l'intérieur, entouré par une zone globalement cyclonique. En conséquence lorsque le vent zonal devient suffisamment intense, la taille \bar{L} associée au cisaillement radial de $\overline{u_\phi}$ n'est rien d'autre que la taille L des tourbillons, et est par là même de l'ordre de grandeur de la taille critique l_c !
2. Par contre en eau (Prandtl élevé, vent zonal encore faible malgré un écart au seuil conséquent) on ne note aucune domination ni des cyclones ni des anticyclones suivant le rayon. Cependant en regardant les profils de vitesses radiales et zonales pour différents forçages, comme ceux présentés sur la figure 2.18, on s'aperçoit tout d'abord que la taille \bar{L} reste très stable à mesure que R/R_c augmente. Les extrema de U_s et U_ϕ^0 sont par ailleurs très semblables, ce qui semble dire que la structure du vent zonal est tout de même liée à celle des tourbillons. On peut en déduire que même pour des simulations à grand nombre de Prandtl, alors que le vent zonal reste plus faible que les vitesses convectives, la taille \bar{L} est donnée par la taille L des tourbillons... encore une fois $O(l_c)$!

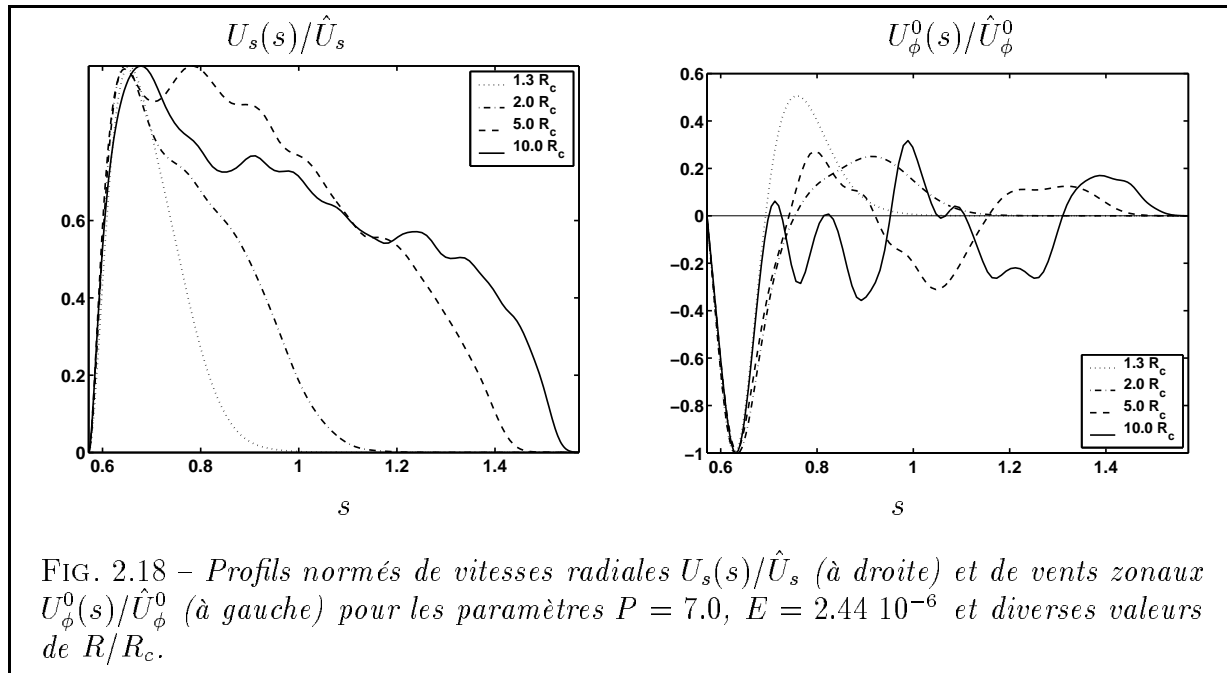


On peut aussi remarquer qu'au fur et à mesure que la convection gagne du terrain dans le volume, on se met à observer, sous certaines conditions des jets multiples, comme ceux présentés pour des simulations en eau sur la figure 2.18. Une première condition à remplir pour observer des jets multiples est alors que la zone convective puisse accueillir au moins deux paires d'anticyclones, ce que l'on peut écrire $\Delta s > 4\overline{L}$, (Δs est la largeur de la zone convective). Au regard de l'étude du seuil d'instabilité (cf section 1.1.2) et du précédent paragraphe, on déduit qu'il faut donc avoir un forçage suffisamment grand pour que la convection colonise une zone de la taille

$$\Delta s > 4l_c \sim 8\pi s_i \beta_0^{-1/3}$$

Cette condition est d'autant plus facile à remplir que β_0 est grand. En plus d'un forçage suffisamment fort, on a donc intérêt à tourner vite pour espérer observer des jets multiples. Par ailleurs on comprend ici pourquoi les simulations en gallium ne montrent pas de jets multiples, contrairement à celles en eau. En effet pour une même configuration géométrique et un taux de rotation identique, la taille l_c est déterminée par la diffusion thermique en gallium et par la viscosité en l'eau. Or il existe un rapport 10 entre les deux en faveur de l'eau (voir le tableau 3.2)! Pour une même géométrie, il faut donc tourner 10 fois plus vite en gallium pour rattraper ce retard. Si l'on regarde maintenant l'impact de la géométrie, on s'aperçoit qu'une pente importante des parois va dans le bon sens pour observer des jets multiples.

On peut mettre ces réflexions en parallèle avec les résultats de Jones et al. [2003], qui étudient le cas de l'enveloppe d'hydrogène moléculaire de Jupiter (voir la section 1.2.2). Leur cadre d'étude est différent du nôtre, dans le sens où ils considèrent la convection non



pas dans une sphère mais dans un conteneur constitué de deux plans β :

- un en haut avec une condition de surface libre;
- un en bas avec une condition de non-glissement, représentant le contact avec la zone constituée d'hydrogène métallique, dans laquelle on estime les mouvements bien plus faibles.

L'équivalent dans leur étude du paramètre η est alors la somme des deux pentes. L'hypothèse de plan β ne semble pas empêcher chez eux l'établissement de l'échelle de Rhines. Parmi leurs conclusions on note l'importance de fortes rotations, comme dans notre étude, afin d'observer des jets multiples. Par contre le nombre de jets diminue quand le forçage devient trop grand. Ce n'est pas nécessairement en contradiction avec notre étude, puisque l'augmentation de la taille des structures qu'ils observent diminue nécessairement le nombre de jets possibles dans un conteneur de taille finie.

L'étude des vents zonaux de Christensen [2002] se place dans un cadre sensiblement différent du nôtre, présentant des simulations 3D très surcritiques ($R > 100 R_c$) à des nombres d'Ekman plus élevés ($10^{-5} < E < 3 \cdot 10^{-4}$), pour $0.3 < P < 3.0$. En augmentant R/R_c , cet auteur observe tout d'abord une augmentation du rapport $\hat{U}_\phi^0/\hat{U}_c \propto \hat{U}_c$, en accord avec l'expression quadratique (2.6). Lorsque le forçage augmente encore ce rapport chute, ce qu'il relie à une perte de corrélation dans le terme $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ et à la perte de géostrophie. Les échelles qu'il montre nécessitent par ailleurs une correction dépendant de P , et le paramètre de contrôle qui semble régir \hat{U}_c , \hat{U}_ϕ^0 et Nu dans ces simulations très surcritiques est alors $R_Q^* = RNuE^3P^{-2.25}$. L'approche QG menée ici ne peut évidemment pas prendre en compte une perte de géostrophie. Cependant les nombres d'Ekman explorés sont plus faibles, ce qui limite la portée de cette réserve. Par contre, comme nous l'avons vu dans la section 2.3.2, nous observons aussi la perte de corrélation dans le terme inertiel non-linéaire. Celle-ci,

dans la gamme de R/R_c que nous avons explorée, ne semble pas suffisante à faire chuter le rapport \hat{U}_ϕ^0/\hat{U}_c .

Une autre étude, par Yano et al. [2003], traite des vents zonaux dans un modèle QG (avec des conditions aux limites de non-glissement), dans le contexte des atmosphères de Jupiter et Saturne. Ils s'intéressent à la nature prograde des vents zonaux près de l'équateur à l'aide d'un modèle qui conserve la vorticité potentielle. Une convection profonde, où les colonnes sont parallèles à l'axe de rotation, permet de reproduire ce caractère prograde. Au contraire, une convection en couche mince, avec des colonnes perpendiculaires au plan tangent à la sphère comme dans l'océan et l'atmosphère terrestre, produit des vents rétrogrades à l'équateur. Cette différence est associée au signe du gradient de vorticité planétaire $\frac{d\zeta_P}{ds}$. Ce dernier est positif en couche profonde où $\zeta_P = -2\Omega \ln(H)$, et négatif en couche mince où $\zeta_P = 2\Omega \cos\theta$ (voir le paragraphe 1.1.1). D'autres études récentes, comme celle de Aurnou and Heimpel [2004], insistent sur l'importance des conditions aux limites dans l'établissement des vents zonaux sur les géantes gazeuses.

Chapitre 3

Approche expérimentale de la convection non-linéaire

J'ai commencé ma thèse en faisant des expériences de convection en rotation rapide afin de compléter celles présentées dans Aubert et al. [2001] dans une gamme de paramètres plus large. J'ai alors apporté quelques modifications, concernant en particulier le temps d'acquisition des données ou encore le traitement du signal (voir plus loin). Par ailleurs, l'équipe "Géodynamo" a fait l'acquisition d'un nouvel appareil de mesures de vitesses plus performant. Ceci pour expliquer pourquoi les résultats expérimentaux présentés ici ne sont pas tous en accord avec ceux obtenus par Julien Aubert. Après avoir décrit notre expérience et les techniques de mesure utilisées, nous nous concentrerons sur quelques points précis:

1. **à faible Prandtl (gallium)**: étude des mesures de vitesse et des fluctuations de température; validation des simulations QG;
2. **à grand Prandtl (eau)**: étude qualitative des mesures de vitesse à grand forçage (jusqu'à 60 fois surcritique); comparaison avec les simulations QG et interrogations sur un comportement encore incompris du vent zonal.

3.1 Description de l'expérience

3.1.1 Les caractéristiques de l'expérience

L'expérience utilisée pour la convection en rotation rapide est celle présentée dans Aubert [2001]. Elle est basée sur une gravité centrifuge

$$\mathbf{g}_c = \Omega^2 s \mathbf{e}_s$$

et un gradient de température inversé, comme celles développées par Busse and Carrigan [1976] - ou plus récemment par Carrigan and Busse [1983], Cardin and Olson [1992],

Jaletzky [1999] ou Sumita and Olson [2000]. Notons tout de suite que les techniques de mesure employées ici, développées pour l'étude de la convection développée, ne sont pas adaptées à l'observation du seuil d'instabilité. Le seuil R_c utilisé dans les expériences (cf le tableau 3.1) sera donc calculé à l'aide du code QG décrit plus haut. Nous reviendrons plus longuement sur cette limite expérimentale après avoir décrit en détail nos techniques de mesure.

Par ailleurs, pour une gravité \mathbf{g} fixée, le seuil de convection augmente avec Ω comme $R_c \propto \Omega^{4/3}$ (cf la section 1.1.2). Mais si l'on introduit la gravité centrifuge \mathbf{g}_c dans la définition du nombre de Rayleigh, on s'aperçoit au contraire qu'en terme d'écart de température le seuil de convection décroît avec Ω comme

$$\Delta T_c \sim \Omega^{-2/3} \quad (3.1)$$

Ainsi nous avons intérêt à tourner vite pour nous éloigner du seuil, comme l'indique la Table 3.1 qui résume les valeurs critiques pour différents paramètres expérimentaux.

P	Ω (tpm)	E	R_c	ΔT_c ($^{\circ}C$)	m_c	ω_c
0.025	200	$2.92 \cdot 10^{-6}$	$6.22 \cdot 10^6$	16.8	12	244
	300	$1.95 \cdot 10^{-6}$	$9.80 \cdot 10^6$	11.9	14	318
	600	$9.74 \cdot 10^{-7}$	$2.20 \cdot 10^7$	6.6	17	502
0.3	—	$2.44 \cdot 10^{-6}$	$1.98 \cdot 10^7$	—	23	1376
7.0	200	$9.74 \cdot 10^{-6}$	$1.16 \cdot 10^7$	0.79	20	1470
	300	$6.50 \cdot 10^{-6}$	$1.92 \cdot 10^7$	0.58	22	1932
	400	$4.87 \cdot 10^{-6}$	$2.76 \cdot 10^7$	0.47	24	2352
	600	$3.25 \cdot 10^{-6}$	$4.59 \cdot 10^7$	0.35	27	3087
	800	$2.44 \cdot 10^{-6}$	$5.59 \cdot 10^7$	0.28	30	3752

TAB. 3.1 – Valeurs critiques pour l'expérience et les simulations numériques, déterminées avec le code QG.

Une autre raison nous impose de tourner vite: la gravité terrestre $\mathbf{g}_T \cdot \mathbf{e}_z = 9.81 \text{ m}^2/s$, qu'il faut comparer à g_c . Comme il existe une composante verticale du gradient de température, la force d'Archimède a aussi une composante verticale associée à \mathbf{g}_T . Un autre type de convection peut alors naître dans la sphère (voir Cordero and Busse [1992]). Nous n'avons procédé à aucune expérience en dessous de 200 tours par minute (tpm), taux de rotation pour lequel la gravité centrifuge s'échelonne entre $|\mathbf{g}_c| = 1.8 - 4.9 |\mathbf{g}_T|$ pour $s \in [s_i, s_e]$.

L'expérience - voir la figure 3.1a - est composée d'une sphère de rayon $r_e = 110 \text{ mm}$, traversée par un cylindre tangent de rayon $r_i = 40 \text{ mm}$ (le manchon). Nous avons utilisé deux sphères: l'une en plexiglas pour les expériences en eau, l'autre en cuivre, recouverte de cataphorèse (un isolant électrique) pour les expériences en gallium. Les propriétés physiques des deux fluides sont présentées dans la table 3.2. On impose une température froide T_i sur

la partie centrale du manchon ($|z| < H_m = 55$ mm) par une circulation d'eau thermostatée. Les extrémités du manchon ($|z| > H_m$) sont recouvertes d'un isolant thermique. La sphère est maintenue à une température chaude T_e : soit la température de la pièce (pour la sphère en plexiglas), soit par l'intermédiaire d'une résistance chauffante (pour la sphère de cuivre). Ceci nous permet d'atteindre une différence de température $\Delta T = T_e - T_i$ d'environ 30 K au maximum - NB: pour les expériences en gallium T_i ne peut descendre en dessous de la température de cristallisation du gallium $T_{crist} = 29.7$ °C. On dispose de sondes de Platine - une dans le manchon, l'autre dans la sphère externe, près de l'équateur - qui enregistrent les températures avec une précision de 0.1 K.

Du fait de la rotation rapide - de 200 à 600 tours par minute - on suppose que les vitesses sont quasi-géostrophiques (invariantes en z). Cette hypothèse a été vérifiée qualitativement en eau dans les expériences de Carrigan and Busse [1983] au seuil ou de Cardin and Olson [1992] en convection développée (par visualisation optique de l'orientation de paillettes dans l'écoulement). Par contre en gallium la seule indication en ce sens, produite par Aubert et al. [2001], est indirecte: elle résulte de corrélations entre deux thermocouples placés en regard par rapport à l'équateur.

3.1.2 Les mesures de vitesse par sonde Doppler

Nous utilisons ici une technique de mesure Doppler ultrasonore pour mesurer quantitativement les vitesses le long de rais dans le fluide (Tokuhiro and Takeda [1993], Brito et al. [2001]). La sonde ultrasonore, qui tourne avec la sphère, envoie un signal intermittent à 4MHz et reçoit un signal rétrodiffusé par les particules en suspension dans le liquide (du pollen pour l'eau, des oxydes de gallium pour le gallium). Ce signal est ensuite envoyé à un appareil d'analyse du signal Doppler (Dop1000 ou Dop2000 de "Signal Processing") par l'intermédiaire de collecteurs électriques tournants - composés d'un système de balais. Le temps d'aller-retour de l'onde le long du rai nous donne la position de la particule, et le décalage en fréquence entre l'émission et la réception nous donne la composante de sa vitesse le long du rai. On a choisi ici un pas d'échantillonnage de 166 ms entre chaque profil. La précision est de 0.715 mm le long du rai. La sonde est disposée de telle façon que les rais sont dans le plan équatorial. On peut choisir deux types de mesures suivant la position de la sonde (voir la figure 3.1b):

1. soit le rai est confondu avec un rayon, et on mesure la vitesse radiale u_s^p des particules;
2. soit le rai est transverse, et forme un angle φ avec le rayon. Dans ce cas on mesure la vitesse transverse u_φ^p des particules. L'angle vaut $\varphi = 21.5 \pm 1.5^\circ$ en gallium et $\varphi = 24.3 \pm 1.5^\circ$ en eau. Le faisceau passe donc à une distance de 1 ± 3 mm du manchon en gallium et de 5 ± 3 mm en eau (d'après Aubert [2001]).

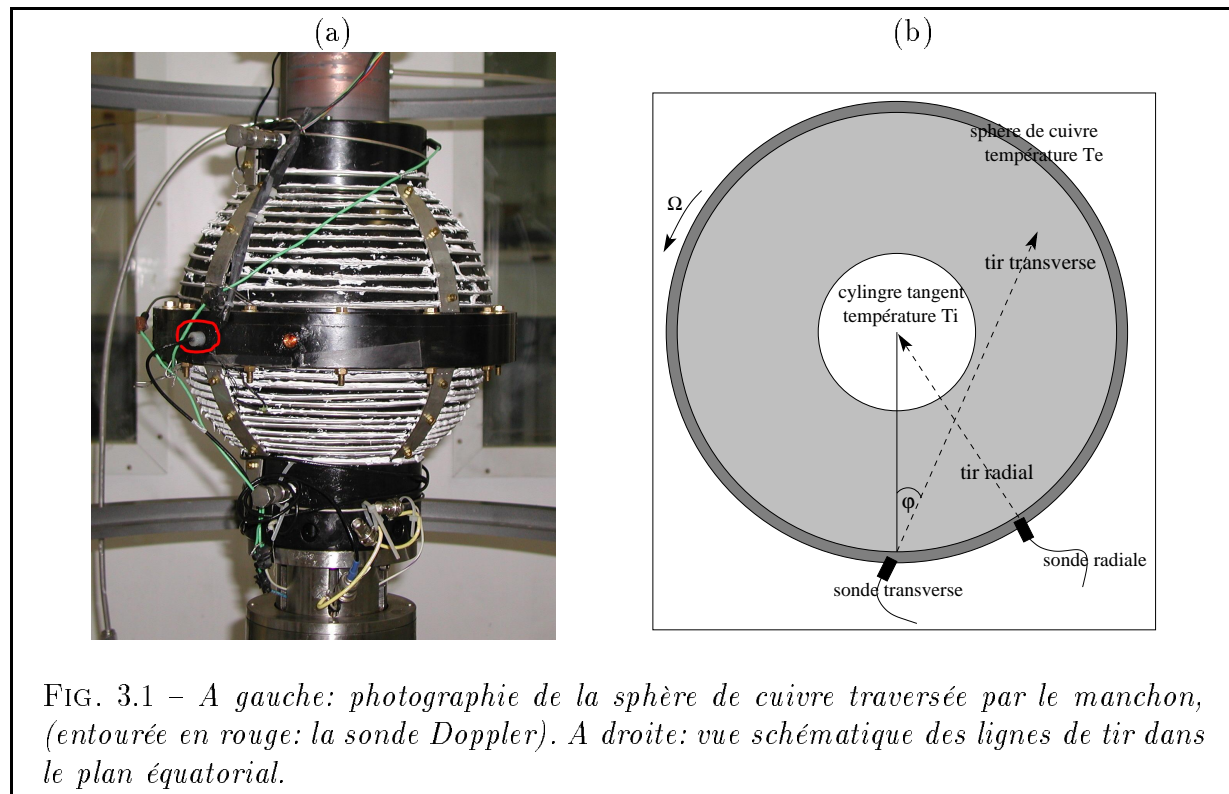
Plusieurs phénomènes viennent perturber nos mesures de vitesses, particulièrement délicates en gallium. Afin d'éviter au maximum le contact du gallium avec l'air, les opérations de remplissage/vidange de la sphère s'effectuent par l'intermédiaire d'un circuit d'argon.

Définition	eau (à 20°C)	gallium liq.	noyau terrestre
densité ρ [kg.m ⁻³]	10 ³	^a 6.095 10 ³	$\sim 10^4$
viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ [m ² .s ⁻¹]	10 ⁻⁶	[*] 2.95 10 ⁻⁷	$\sim 7 \cdot 10^{-6}$
coef. d'expansion thermique α [K ⁻¹]	2. 10 ⁻⁴	^b 1.26 10 ⁻⁴	^c $\sim 10^{-5}$
conductivité thermique k [W.(m.K) ⁻¹]	0.59	^b 30.6 [30°C]	^c ~ 30
chaleur spécifique C_p [J.(kg.K) ⁻¹]	4180	^a 381.5	^c ~ 800
diffusivité thermique $\kappa = \frac{k}{\rho C_p}$ [m ² .s ⁻¹]	1.4 10 ⁻⁷	[*] 1.32 10 ⁻⁵	[*] $\sim 4 \cdot 10^{-6}$
conductivité électrique σ [(Ωm) ⁻¹]	—	^a 3.87 10 ⁶	^c $\sim 10^6$
diffusivité magnétique $\lambda = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$ [m ² .s ⁻¹]	—	[*] 2.06 10 ⁻¹	[*] ~ 1

TAB. 3.2 – *Propriétés physiques de l'eau, du gallium liquide et du noyau terrestre (d'après Brito [1998]). Sources: ^a Sabot and Lauvray [1995], ^b Okada and Ozoe [1992], ^c estimé à partir des propriétés du fer liquide au point de fusion par Stacey [1992], ^{*} calculé.*

Malgré tout un film d'oxydes de gallium vient rapidement se déposer sur les parois. Ceci gêne la mesure des vitesses dans les premiers centimètres près de la sphère externe par diffraction du faisceau. Comme il n'est pas possible de nettoyer la sphère avant chaque expérience, la qualité du signal se dégrade avec le temps (à l'échelle de quelques jours).

Par ailleurs la qualité de la mesure dépend de la quantité de particules en suspension dans le fluide. Comme ces particules n'ont jamais exactement la même densité que le liquide, elles sont centrifugées/centripétées suivant qu'elles sont plus lourdes/légères que le fluide environnant pendant les expériences en rotation. Alors la qualité du signal se détériore aussi à l'échelle de quelques minutes. Ce phénomène est particulièrement marqué aux forts taux de rotation, ce qui amène à faire des expériences plus courtes. Heureusement pour un ΔT fixé la dynamique s'accélère avec Ω , ce qui compense en partie ce problème. Dans le but d'homogénéiser la densité de particules avant chaque mesure on mélange le fluide par une série de spin-up / spin-down vigoureux (on diminue le taux de rotation environ de moitié avant de revenir au taux de rotation utilisé pour la mesure).



La dynamique augmente d'une part avec la différence de température - à Ω fixé - et d'autre part, à cause de l'évolution (3.1) du seuil en présence de gravité centrifuge, avec le taux de rotation - à ΔT fixé. Le temps de passage des tourbillons devant la sonde, est alors d'autant plus court que Ω et ΔT sont grands. Les profils de vitesses retenus doivent présenter, une fois l'état de convection stationnaire atteint, le passage d'au moins $N \simeq 10$ tourbillons devant la sonde, ce qui correspond à autant d'oscillations du signal. Le temps d'acquisition τ nécessaire à l'obtention d'une mesure est alors d'autant plus court que Ω et ΔT sont grands. Nous avons besoin d'un traitement du signal robuste pour faire en sorte que nos mesures soient reproductibles. Nous avons finalement convergé vers une médiane glissante dans le temps pour chaque profondeur de tir. Nous avons choisi empiriquement une médiane basée sur 15 profils, soit $0.166 \times 15 = 2.49$ s, pour garder un maximum d'information sans donner trop d'importance au bruit. La figure 3.2 présente un exemple de mesure de vitesse radiale avant et après traitement du signal.

3.1.3 La construction des profils de vitesse

A partir des mesures de vitesses u_s^p et u_ϕ^p décrites précédemment, on peut reconstituer des profils de vitesse radiale u_s et de vitesse zonale $\overline{u_\phi}$ dans le fluide. Pour cela nous considérons que pour un intervalle de mesure τ suffisamment long, les fluctuations temporelles mesurées observées le long d'un rayon sont statistiquement représentatives des fluctuations

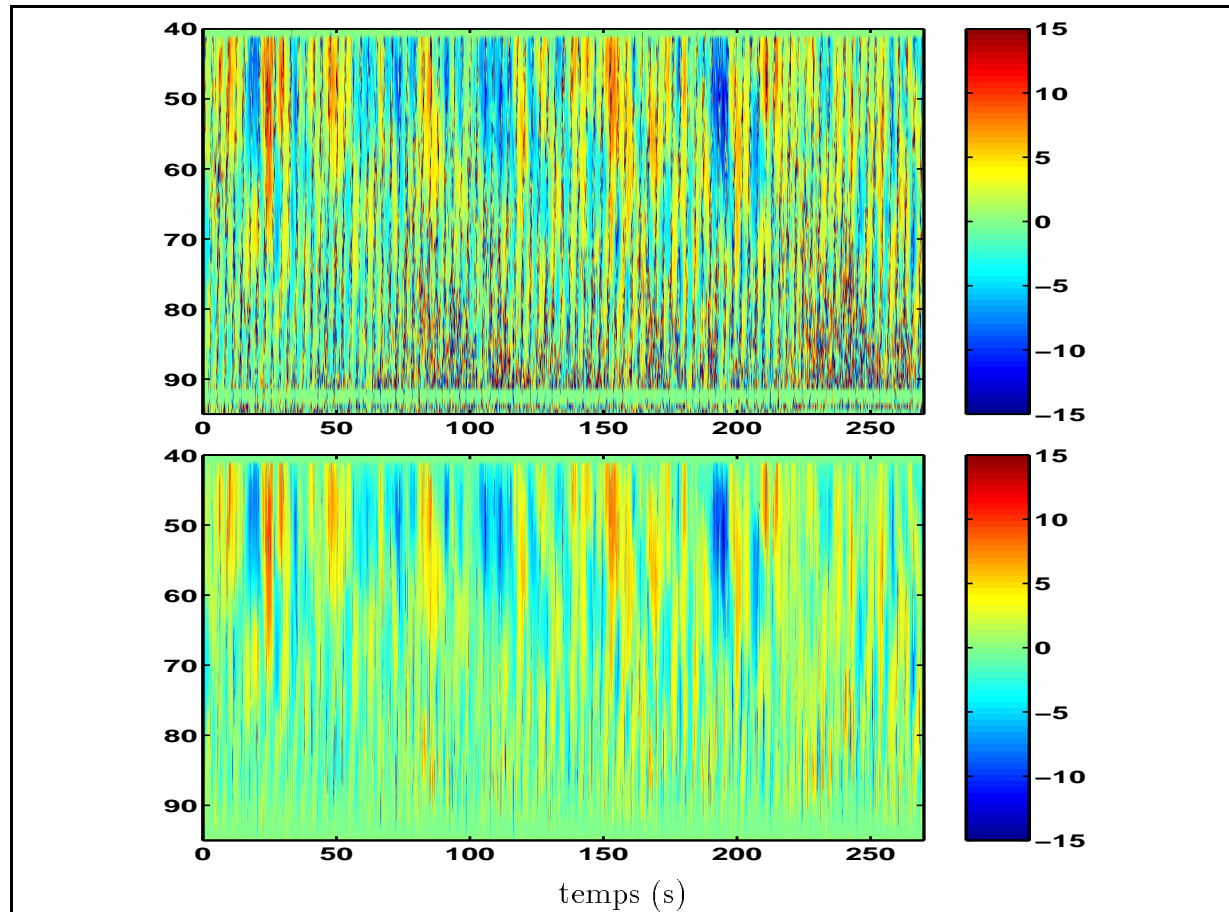


FIG. 3.2 – Cartes spatio-temporelles de vitesse radiale avant et après filtrage, pour $P = 0.025$, $E = 1.95 \cdot 10^{-6}$ et $R = 2.0 R_c$. Les traits verticaux sur la figure du haut résultent de parasites électro-magnétiques.

dans l'ensemble de la sphère. Les profils de vitesse mesurés présentent des zéros artificiels, d'autant plus nombreux que la qualité du signal est mauvaise. On les extrait des séries temporelles pour construire les profils de vitesse.

Avant d'aller plus loin, soulignons que de manière générale les mesures effectuées sur le rai transverse sont de moins bonne qualité que les mesures radiales. Ainsi s'il est possible d'estimer de manière reproductible l'amplitude des fluctuations temporelles de u_s^p , il n'en est pas de même pour u_φ^p . Ceci explique le choix de notre traitement de donnée (on estime la "rms" des vitesses radiales, et seulement la moyenne des vitesses transverses).

La vitesse radiale

Pour obtenir la vitesse radiale du fluide il nous faut prendre en compte la centrifugation (resp. centripétation) des particules, suivant qu'elles sont plus lourdes (resp. légères) que le

fluide environnant. Au premier ordre, pour un fluide QG, la conservation de la masse $(1.9)_I$ impose $\overline{u_s}(s, t) = 0$. (voir le paragraphe 2.1, partie I). Ceci se traduit, pour un azimut ϕ donné, par

$$\frac{1}{\tau} \int_{\tau} u_{s|\phi}(s, t) dt = 0.$$

Or les vitesses radiales mesurées u_s^p sont effectivement à ϕ constant. On peut alors estimer

$$u_{s|\phi}(s, t) = u_s^p(s, t) - \frac{1}{\tau} \int_{\tau} u_s^p(s, t) dt$$

Cette correction est stable et bien contrainte au cours d'une expérience, mais peut varier d'une expérience à l'autre, suivant la propreté du gallium, avec des valeurs atteignant jusqu'à 2 mm/s. Les profils de vitesse radiale sont alors estimés de la même manière que dans le cas numérique (cf le chapitre 2):

$$U_s(s) = \left[\frac{1}{\tau} \int_{\tau} u_{s|\phi}^2(s, t) dt \right]^{1/2} \quad (3.2)$$

Les barres d'erreur sur les profils radiaux sont calculées pour chaque profondeur de tir à partir des distributions de vitesse. Nous considérons que les extrémités des distributions ne correspondent pas à des observations réalistes, mais à du bruit électro-magnétique. Pour une série temporelle τ , on note τ^* l'ensemble des mesures vérifiant

$$|u_{s|\phi}(s, t)| > 2U_s(s)$$

On peut toujours décomposer nos mesure de la façon suivante:

$$U_s^2(s) = \frac{1}{\tau} \left[\int_{\tau-\tau^*} u_{s|\phi}^2(s, t) dt + \int_{\tau^*} u_{s|\phi}^2(s, t) dt \right]$$

Pour une expérience "réussie" il y a peu de bruit, et l'on peut alors écrire

$$U_s(s) \simeq \left[\frac{1}{\tau} \int_{\tau} u_{s|\phi}^2(s, t) dt \right]^{1/2} \left(1 + \frac{\int_{\tau^*} u_{s|\phi}^2(s, t) dt}{\int_{\tau} u_{s|\phi}^2(s, t) dt} \right)^{1/2}$$

Un développement limité au premier ordre nous donne alors l'erreur relative $\delta(s)$ que l'on fait sur l'estimation des profils U_s :

$$\delta(s) = \frac{1}{2U_s(s)} \left[\frac{1}{\tau} \int_{\tau^*} u_{s|\phi}^2 dt \right]^{1/2}$$

La vitesse transverse

Nous commençons par extraire la composante moyenne du signal transverse:

$$\langle U_\varphi \rangle_\tau(s) = \frac{1}{\tau} \int_\tau u_\varphi^p(s, t) dt$$

On note les fluctuations temporelles

$$u_\varphi(s, t) = u_\varphi^p(s, t) - \langle U_\varphi \rangle_\tau(s)$$

à partir de quoi on calcule les fluctuations mesurées sur le faisceau azimuthal

$$U_\varphi(s) = \left[\frac{1}{\tau} \int_\tau u_\varphi^2(s, t) dt \right]^{1/2}$$

On peut remarquer que cette vitesse résulte de la projection de la vitesse convective \mathbf{u}_c totale le long du rai, et qu'il ne nous est pas possible d'en extraire la composante azimuthale. En effet si l'on note \mathbf{e}_φ le vecteur directeur du rai transverse, alors la vitesse u_φ se décompose ainsi

$$u_\varphi(s, t) = \mathbf{u}_c \cdot \mathbf{e}_\varphi = u_s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_\varphi + u_\phi \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\varphi$$

Les erreurs qui viennent perturber l'estimation des profils azimuthaux sont assez nombreuses. Outre les zéros artificiels évoqués plus haut, que l'on peut facilement enlever, on peut compter sur:

1. **la centripétation des particules:** Il n'était pas possible de mesurer les vitesses simultanément sur les deux rais. De la sorte nous ne pouvions pas estimer l'erreur induite par la centripétation des particules sur l'estimation des profils de vent zonal. Notons que cette erreur s'amenuise à mesure que le rai transverse se rapproche du cylindre, puisque sa direction devient ortho-radiale (la centripétation est radiale). L'amplitude du vent zonal n'en sera donc que peu modifiée. Cela peut par contre induire une composante continue non-nulle vers la frontière externe. Pour une vitesse de centripétation \overline{u}_s^c , on peut estimer l'impact sur la vitesse transverse:

$$\delta U_1(s) = \overline{u}_s^c \sqrt{1 - \left(\frac{s_e \sin \varphi}{s} \right)^2}$$

2. **le bruit électro-magnétique:** comme pour les mesures radiales, le bruit est parfois difficile à réduire (les signaux ultrasonores passent par des collecteurs électriques tournants). Il s'en suit alors une erreur dans notre estimation de la moyenne du profil. Pour une série temporelle τ , on note τ^* l'ensemble des mesures vérifiant

$$|u_\varphi^p(s, t)| > 2U_\varphi(s)$$

On peut toujours décomposer nos mesure de la façon suivante:

$$\langle U_\varphi \rangle_\tau(s) = \frac{1}{\tau} \left[\int_{\tau-\tau^*} u_\varphi^p(s,t) dt + \int_{\tau^*} u_\varphi^p(s,t) dt \right]$$

Pour une expérience "réussie" il y a peu de bruit, et l'on peut alors écrire

$$\langle U_\varphi \rangle_\tau(s) \simeq \frac{1}{\tau} \int_\tau u_\varphi^p(s,t) dt \left(1 + \frac{\int_{\tau^*} u_\varphi^p(s,t) dt}{\int_\tau u_\varphi^p(s,t) dt} \right)$$

On obtient alors l'erreur relative $\bar{\delta}(s)$ que l'on fait sur l'estimation des profils U_φ :

$$\bar{\delta}(s) = \frac{1}{\tau \langle U_\varphi \rangle_\tau(s)} \int_{\tau^*} u_\varphi^p(s,t) dt$$

3. **un décalage inexpliqué:** il existe un décalage inexpliqué entre la réelle distance sonde-particule et celle affichée par l'appareil Doppler. Ce décalage n'est pas constant d'un jour à l'autre (entre 2 et 10 mm). Aucune corrélation n'a été trouvée, ni avec la température, ni avec la vitesse de rotation. La propreté du gallium est sans doute en cause. Ceci n'est pas trop grave pour une mesure radiale puisqu'il est facile de reconnaître le manchon sur un profil. Ce calibration est moins nette sur une mesure transverse car on ne peut se recalier par rapport au cylindre tangent. On estime la position à ± 1 mm, ce qui induit une erreur lorsque l'on traduit la distance à la sonde en terme de rayon.
4. **la variation de l'angle d'entrée φ** dans le fluide, évoquée plus haut, entraîne le même genre d'erreur, avec en plus la possibilité donnée au faisceau de rencontrer le manchon.
5. **la largeur du faisceau:** à une distance donnée de la sonde, le faisceau Doppler n'est pas ponctuel, et donc les mesures apportées par cet appareil sont en fait intégrées sur un volume. Le constructeur nous indique que le faisceau est collimaté sur les 5 premiers centimètres, puis diverge avec un demi-angle de 2° . Dans le cas du rai transverse ce phénomène est sans doute plus grave que pour le faisceau radial, puisque la "boîte" d'intégration correspond à une plus grande plage de rayons. Le faisceau peut être amené à rencontrer le manchon. On doit avouer que les mécanismes qui amènent l'appareil Doppler à nous donner une vitesse importante dans les premiers mm proches du manchon en tir transverse sont obscures.

Les trois précédentes sources d'erreur concernent la géométrie de la zone de tir. Or pour reconstituer le vent zonal il nous faut prendre en compte la projection de celui-ci sur l'axe du faisceau, avec un angle de projection dépendant de la distance à la sonde. Ces questions géométriques influent alors sur la reconstruction du profil de vitesse zonale. Ceci nous amène à intégrer le profil de vitesse $\langle U_\varphi \rangle_\tau$ sur un intervalle $I(s) = s \pm 2$ mm. Lorsque le

faisceau rencontre le manchon, on attribue à $\langle U_\varphi \rangle_\tau$ une vitesse nulle pour $s < 40$ mm. On note alors

$$U_\varphi^0(s) = \frac{1}{I(s)} \int_{I(s)} \langle U_\varphi \rangle_\tau(s) ds$$

L'erreur commise sur cette estimation est alors évaluée à partir des extrema de la vitesse $U_\varphi^0(s)$ dans l'intervalle $I(s)$, auxquels s'ajoutent les erreurs $\delta U_1(s)$ et $\bar{\delta}(s) \langle U_\varphi \rangle_\tau(s)$. Les bornes inférieures et supérieures du profil $U_\varphi^0(s)$ valent donc

$$\begin{aligned} U_\varphi^{inf}(s) &= \min_{I(s)} \{U_\varphi^0\} - \delta U_1(s) - \bar{\delta}(s) \langle U_\varphi \rangle_\tau(s) \\ U_\varphi^{sup}(s) &= \max_{I(s)} \{U_\varphi^0\} + \delta U_1(s) + \bar{\delta}(s) \langle U_\varphi \rangle_\tau(s) \end{aligned}$$

Nous considérons que la vitesse moyenne U_ϕ^0 résulte alors de la projection du vent zonal U_ϕ^0 sur l'axe du faisceau:

$$U_\phi^0(s) = \frac{s}{s_e \sin \varphi} U_\varphi^0(s)$$

avec les bornes inférieure et supérieure du profil $U_\phi^0(s)$ données par

$$\begin{aligned} U_\phi^{inf}(s) &= \frac{s}{s_e \sin \varphi} U_\varphi^{inf}(s) \\ U_\phi^{sup}(s) &= \frac{s}{s_e \sin \varphi} U_\varphi^{sup}(s) \end{aligned}$$

3.1.4 Impact du vent thermique

Un autre phénomène physique peut venir perturber l'estimation des vitesses azimutales: le vent thermique, déjà évoqué à propos des limites du modèle QG dans le paragraphe 2.1, partie I. Le problème n'est cependant pas le même en présence de gravité centrifuge qu'avec une gravité radiale. En effet le vent thermique résulte de l'écart entre les courbes d'iso-gravité et celles d'iso-densité, ici les isothermes - cf l'équation (2.12)_I. Dans le cas statique, celles-ci sont confondues en présence d'une gravité radiale. Le moteur du vent thermique provient alors des perturbations de température Θ , supposées relativement faibles dans les objets du type de la Terre, où l'on ne s'éloigne pas trop de l'adiabat - cf la section 1.2 de l'introduction générale. Ceci nous a amené à passer outre ce phénomène pour notre modélisation QG. Par contre dans le cas de l'expérience, avec une gravité centrifuge, les iso-gravités sont parallèles à l'axe de rotation! Nous pouvons estimer l'allure des vitesses induites par ce phénomène à partir de l'équation du vent thermique (2.12)_I

$$-2\Omega \frac{\partial u_\phi^1}{\partial z} = -\alpha \Omega^2 s \frac{\partial}{\partial z} (T - T_0)$$

On peut estimer en gallium que les perturbations de températures Θ restent faibles devant ΔT , puisque l'on ne s'éloignera pas beaucoup du seuil de convection. La production majeure

de vent thermique provient alors du gradient vertical du profil statique T_s^{exp} associé à l'expérience. Nous calculons ce dernier en résolvant numériquement l'équation de Laplace dans le volume V_{exp} composé de la boule tronquée du cylindre tangent, avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} T(r_e) = T_e \\ T(s_i, |z| < H_m) = T_i \\ \frac{dT}{ds}(s_i, |z| > H_m) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

On peut alors calculer (Busse [1970] et Aubert et al. [2001])

$$[u_\phi^1(s, z)]_z^H = \frac{1}{2} \alpha \Omega s [T_s^{exp}(s, z)]_z^H$$

Or la condition de non-glissement doit s'appliquer en $z = H$. On arrive alors à

$$u_\phi^1(s, z) = \frac{1}{2} \alpha \Omega s [T_s^{exp}(s, z) - T_e] \quad (3.4)$$

Dans notre cas où la gravité est centrifuge le vent thermique est prograde pour un gradient de température stable (i.e. $T_e - T_i < 0$) et rétrograde pour un gradient de température instable ($T_e - T_i > 0$). Ce phénomène va ici induire une erreur proportionnelle à Ω et ΔT dans notre estimation des vents zonaux.

Une inversion du problème $\Delta T_s^{exp} = 0$ (par une méthode de relaxation "SOR", voir l'annexe A pour le principe général) et le calcul associé des vitesses u_ϕ^1 à partir de (3.4) sont présentés sur la figure 3.3. On calcule dans ces conditions ($P = 0.025$, $\Omega = 300$ tpm, i.e. $E_t = 1.95 \cdot 10^{-6}$, $\Delta T = 20$ K, i.e. $R = 1.7R_c$) un maximum de l'amplitude du vent thermique d'environ 1.6 mm/s. Ceci constitue une borne supérieure, puisque cette approche ne prend pas en compte la condition de non-glissement sur le manchon, qui tend à ramener les vitesses vers 0.

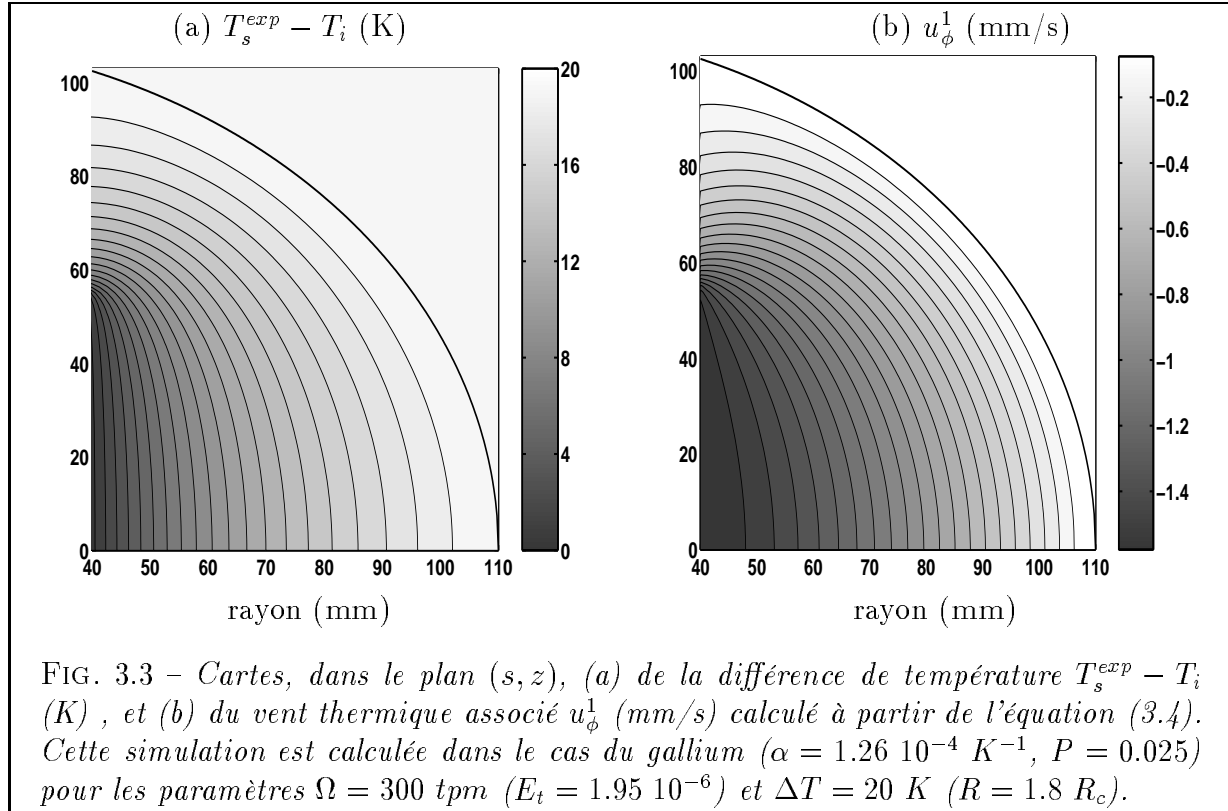
Nous avons tenté d'isoler expérimentalement le vent thermique en appliquant un gradient de température stable ($T_i > T_e$). Les mesures expérimentales - pas de très bonne qualité vu qu'il n'y a pas de mouvements radiaux pour remobiliser les particules - sont environ 2 fois plus faibles que le résultat des calculs numériques. Au vu du profil de vitesse zonale présenté sur la figure 3.6a, qui se situe dans la même gamme de paramètre que le calcul de la figure 3.3, le vent thermique en gallium est d'un ordre de grandeur plus faible que le vent zonal produit par le tenseur de Reynolds. Par ailleurs le seuil de convection en gallium est relativement élevé (cf le tableau 3.1). Ainsi on ne s'éloigne pas beaucoup du seuil, et l'hypothèse $\Theta \ll \Delta T$ sera donc bien vérifiée dans nos expériences. Nous décidons alors de négliger le vent thermique pour les expériences en gallium.

Le problème en eau est un peu différent. D'une part on s'attend, pour un nombre de Prandtl élevé, à de faibles amplitudes du vent zonal (cf la section 2.4). D'autre part on peut atteindre en eau des nombres de Rayleigh plusieurs dizaines de fois surcritique. Loin

du seuil de convection il doit alors exister des couches limites thermiques marquées près de la sphère externe, comme nous l'avons déjà évoqué dans la partie 2.2. Alors la contribution du vent thermique va changer de forme. Dans le coeur du fluide, la température moyenne devrait tendre à s'homogénéiser. Par contre le gradient de température de couche limite pourrait devenir relativement important. Dans ce cas le vent thermique prendrait naissance dans les couches limites thermiques, et serait invariant selon \mathbf{e}_z une fois sorti de ces couches limites. Si l'on note T_m la température homogène dans le coeur du fluide, alors l'amplitude du vent thermique devient

$$u_\phi^1 \simeq \frac{1}{2} \alpha \Omega s [T_m - T_e]$$

En considérant $T_m \simeq (T_e + T_i)/2$ on obtient $u_\phi^1 \simeq O(\alpha \Omega s \Delta T/4)$. De manière indicative, on obtient pour $\Omega = 300$ tpm et $\Delta T = 20$ K un vent thermique de l'ordre du mm/s. Ceci n'est pas forcément négligeable devant le vent zonal produit par la convection QG. Cependant les mesures en eau sur le faisceau transverse nous réservent encore des surprises, comme nous le verrons dans le paragraphe 3.2.2.



3.1.5 Les mesures de température par thermocouples

Nous cherchons ici à mesurer des variations de potentiel électriques associées à des fluctuations de température dans l'expérience en gallium. Des 6 sondes de potentiel Platine-Constantan ($Pt - Ct$) initialement présentes sur la sphère de cuivre, deux seulement ont survécu aux tribulations de l'expérience (arrachement en rotation, fuites de gallium à travers les sondes qui nous ont obligé à les condamner...). L'une est située près de l'équateur (S_{EQ}), l'autre proche du cylindre tangent (S_{CY}), toutes deux dans l'hémisphère nord, à des azimuts décalés de 30° . Ces sondes sont illustrées schématiquement sur la figure 3.4.

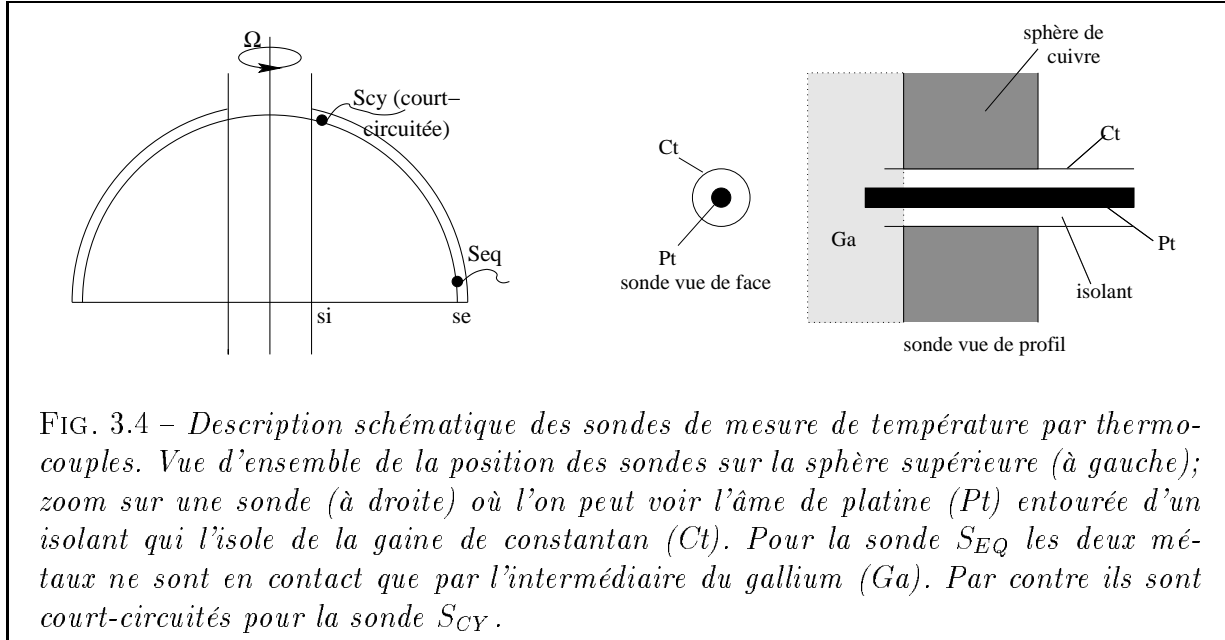


FIG. 3.4 – Description schématique des sondes de mesure de température par thermocouples. Vue d'ensemble de la position des sondes sur la sphère supérieure (à gauche); zoom sur une sonde (à droite) où l'on peut voir l'âme de platine (Pt) entourée d'un isolant qui l'isole de la gaine de constantan (Ct). Pour la sonde S_{EQ} les deux métaux ne sont en contact que par l'intermédiaire du gallium (Ga). Par contre ils sont court-circuités pour la sonde S_{CY} .

Le principe de la mesure repose sur le potentiel thermo-électrique des couples de métaux. Le potentiel V entre deux métaux en contact dépend de la température. Dans notre cas on notera

$$\begin{aligned} V_{Pt/Ga} &= X_{Pt/Ga} T \\ V_{Ct/Ga} &= X_{Ct/Ga} T \end{aligned}$$

Les potentiels thermo-électriques associés aux couples $Pt - Ga$ et $Ct - Ga$ ont été calibrés il y a 7 ans lors des premiers pas de la construction de l'expérience (vive les cahiers de manip'!):

$$\begin{aligned} X_{Pt/Ga} &= 4.7 \pm 0.1 \mu V / ^\circ C \\ X_{Ct/Ga} &= 35.6 \pm 0.1 \mu V / ^\circ C \end{aligned}$$

Ces sondes sont mouillées dans le gallium. La sonde équatoriale S_{EQ} est intacte, c'est à dire que l'âme de platine de la sonde n'est en contact avec la gaine de constantan que par

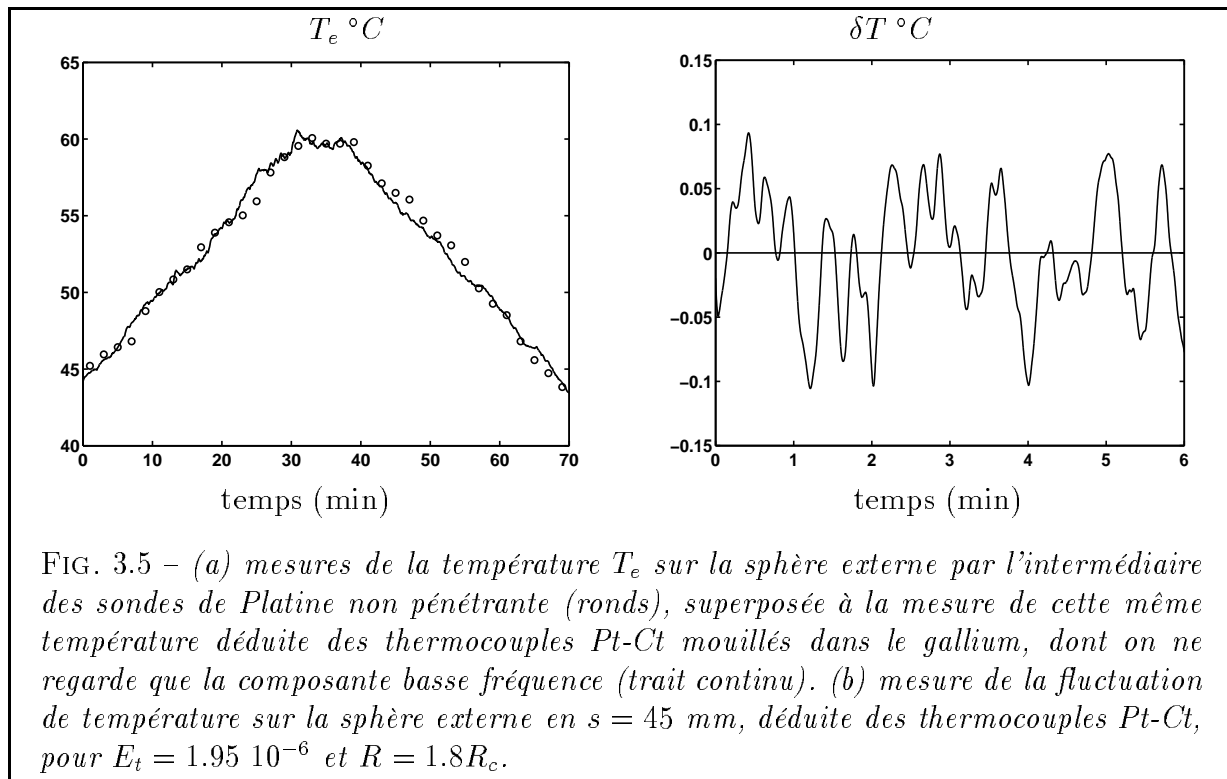


FIG. 3.5 – (a) mesures de la température T_e sur la sphère externe par l'intermédiaire des sondes de Platine non pénétrante (ronds), superposée à la mesure de cette même température déduite des thermocouples Pt-Ct mouillés dans le gallium, dont on ne regarde que la composante basse fréquence (trait continu). (b) mesure de la fluctuation de température sur la sphère externe en $s = 45$ mm, déduite des thermocouples Pt-Ct, pour $E_t = 1.95 \cdot 10^{-6}$ et $R = 1.8R_c$.

l'intermédiaire du gallium (voir le schéma de la figure 3.4). Par contre l'âme et la gaine de la sonde S_{CY} sont court-circuités! Les deux métaux de la sonde répondent en fait de manière similaire à un écart de température, c'est à dire que cette sonde se comporte comme un hybride entre le platine et le constantan, de telle sorte que

$$V_{CY/Ga} = X_{CY/Ga} T$$

Nous ne connaissons malheureusement pas le coefficient $X_{CY/Ga}$, qu'il nous est impossible de calibrer in situ sans démonter l'expérience. Par ailleurs le signal (de l'ordre de quelques μV) passe par des amplificateurs de gain $G = G_0 (1 \pm 0.05)$, avec $G_0 = 2000$. On a alors accès en sortie des amplificateurs à

$$V^* = G.V$$

où V est le potentiel en sortie des sondes. Nous avons bénéficié à ce stade d'un heureux concours de circonstance qui nous a permis de transformer nos μV en $^{\circ}C$. Tout d'abord en mesurant la différence de potentiel entre les deux bornes de la sonde équatoriale (intacte) lors d'une expérience de convection en rotation en régime stationnaire (avec T_i et T_e stabilisés depuis longtemps), nous avons vérifié que l'on n'observait aucune fluctuation de potentiel, i.e. pas de fluctuations de température proche de l'équateur! Ceci est en accord avec les simulations numériques présentées dans les sections précédentes.

On mesure ensuite, lors d'une longue série d'expériences de convection en rotation, la différence de potentiel entre la patte en constantan de S_{EQ} et la sonde mixte S_{CY} . Etant donné

que l'on n'observe pas de signal thermique associé à la convection en S_{EQ} , on considère que la sonde S_{EQ} est à la température T_e . Le cuivre étant un très bon conducteur, on peut estimer que les températures moyennes des deux sondes sont les mêmes. La sonde S_{CY} est alors à une température $T_e + \delta T$, avec δT la signature du passage des panaches thermiques. On peut alors écrire

$$V_{Ct/Ga} - V_{CY/Ga} = [X_{Ct/Ga} - X_{CY/Ga}] T_e - X_{CY/Ga} \delta T$$

On observe alors des fluctuations rapides δV^* du potentiel, superposées à une dérive lente V_0^* . Nous nous sommes aperçus que cette dérive lente du potentiel était très bien corrélée à la température de la sphère externe, mesurée par ailleurs avec une sonde Platine (voir plus haut et la figure 3.5a). Ceci nous a permis de calibrer, à partir des mesures basse fréquence V_0^* ,

$$G [X_{Ct/Ga} - X_{CY/Ga}] = K$$

avec $K = 43.3 \pm 3.5 \text{ mV}/^\circ\text{C}$. Nous en déduisons le coefficient

$$X_{CY/Ga} = X_{Ct/Ga} - \frac{K}{G} = 14.0 \pm 1.9 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$$

valeur intermédiaire entre ceux des deux couples connus. On a alors un moyen pour transformer les fluctuations haute fréquence δV^* du potentiel - dont un exemple est présenté sur la figure 3.5b - en fluctuations de température associées au passage de tourbillons:

$$\delta T = -K' \delta V^*$$

avec $K' = (GX_{CY/Ga})^{-1} = 35.7 \pm 6.6 \text{ mK/mV}$. Cette technique de mesure peu conventionnelle sera exploitée par la suite lors d'expériences de convection en gallium avec et sans champ magnétique.

3.1.6 Limites de l'estimation du seuil de convection

Limites de la mesure

On peut maintenant illustrer plus longuement pourquoi il ne nous est pas possible de déterminer expérimentalement le seuil de convection. Tout d'abord il faut savoir que les sondes de température à l'origine de notre estimation de ΔT ne sont pas mouillées dans le fluide. En gallium la sonde extérieure est placée dans le cuivre (bon conducteur de chaleur) et la sonde intérieure contre le cuivre dans le cylindre tangent, le long duquel il peut exister une variation de température. En eau la sonde externe est placée dans la sphère en plexiglas (mauvais conducteur de chaleur!). Il pourrait ainsi y avoir une différence entre notre estimation de ΔT et la température réelle. Ce n'est cependant pas le problème

limitant, et il nous est possible de stabiliser l'écart de température ΔT . La difficulté majeure que l'on rencontre réside dans la détection de signal convectif.

En ce qui concerne les mesures par effet Doppler, l'origine de nos limites est intimement lié à la technique de mesure. Nous avons besoin d'un mouvement convectif suffisamment intense pour remobiliser les réflecteurs (particules en suspension) à l'origine de la mesure Doppler, sans quoi celles-ci se voient chassées du coeur du fluide par centripétation/centrifugation. On ne sait alors pas mesurer le "zéro" en terme de vitesse (sans parler de bruit électromagnétique). Lorsque nous avons imposé un ΔT plus petit que le ΔT_c calculé avec notre code QG, nous n'avons jamais observé autre chose que du bruit. Par ailleurs jamais nous n'avons observé en gallium de convection oscillante, comme celle décrite dans le paragraphe 2.3.2. Ainsi nous ne présenterons pas de vitesses *rms* d'amplitude plus faible que 2 mm/s.

Pour les mesures de fluctuations de température, le problème vient de la stabilisation de la mesure. En particulier le passage du signal par des amplificateurs $\times 2000$ est assez sensible. Il est associé à des fluctuations temporelles de la mesure, qu'il est difficile de dissocier du signal recherché lorsque l'on est proche du seuil, avec une dynamique lente. Par ailleurs, comme nous l'avons brièvement évoqué dans le paragraphe 3.1.5, nous devons filtrer le signal brut pour fraire ressortir les fluctuations de températures, ce qui impose aussi un seuil de détection. Nous observons ainsi la même chose pour $0 < \delta T < 0.4^\circ\text{C}$, ce qui nous empêche de déterminer le seuil à mieux qu'environ 2 degrés près. (voir les barres d'erreur de la figure 3.11).

En cela ces deux techniques de mesure sont fondamentalement différentes de mesures de flux de chaleur (voir par exemple Cardin and Olson [1994] ou encore la thèse récente de Woodrow Shew [2004]). En effet la valeur du flux de chaleur à mesurer au seuil de convection n'est pas nulle, et peut alors ressortir des barres d'erreur!

Limites de l'estimation QG

Il faut cependant noter que notre estimation QG du seuil de convection expérimental est sujette à caution. Rappelons pour cela que les résultats QG ne nous apportent une bonne estimation du seuil tri-dimensionnel (à 5% près, cf tableau 1.2)... uniquement dans la mesure où le champ de température statique tri-dimensionnel est bien connu! En effet c'est ce dernier qui nous amène à l'estimation du paramètre ΔT^{2D} de l'équation (2.15)_I. Or le champ de température statique expérimental vérifie les conditions aux limites (3.3). Par conséquent il est différent du champ statique $T_s^{3D}(r)$ obtenu entre deux sphères isothermes!

Nous avons (trop tardivement) calculé numériquement un tel champ en inversant le problème $\Delta T = 0$ couplé aux conditions aux limites (3.3). Cela amène à considérer $\Delta T^{2D} = 0.656$, i.e. multiplier par environ 0.70 le seuil de convection obtenu avec la précédente valeur ($\Delta T^{2D} = 0.453$, issue des conditions aux limites sphériques). Ceci n'a pas été pris en compte dans cette étude, mais nous pensons l'intégrer dans les articles à venir. Nous

avons par ailleurs vérifié que le comportement numérique général n'était pas perturbé par une telle modification. *Pour une valeur donnée de ΔT , cette nouvelle estimation modifie tous les résultats dans une même proportion, quels que soient le taux de rotation, le champ magnétique, etc. Dès lors elle ne change pas les conclusions de cette étude.*

3.2 Résultats expérimentaux et comparaison au code

Nous ne souhaitons pas présenter ici tous les résultats expérimentaux obtenus en convection sans champ magnétique, mais plutôt nous concentrer sur quelques points:

1. nous allons tout d'abord synthétiser les mesures de température et de vitesses obtenues en gallium. Ceci nous permet en premier lieu d'illustrer le type d'objets que nous allons étudier dans la suite du manuscrit. C'est aussi le moyen de valider notre modèle QG en gallium dans la gamme de paramètres expérimentaux explorée, en quelque sorte une assurance pour l'étude en présence de champ magnétique.
2. nous allons ensuite discuter de nouvelles mesures de vent zonal en eau à grand forçage, où nous avons observé des jets multiples et un comportement non expliqué. Ce point nécessiterait une étude plus approfondie que nous n'avons pas eu le temps de mener.

Nous insistons aussi sur le fait qu'il nous est difficile de vérifier expérimentalement les échelles dérivées dans les sections précédentes. Tout d'abord il nous manque un ingrédient essentiel: la mesure du flux de chaleur, et donc l'estimation du nombre de Nusselt. Par ailleurs nous ne disposons pas d'une gamme de paramètres suffisamment vaste en gallium, où en particulier il nous est impossible de réaliser des expériences très surcritiques. Une superposition brute entre expérience et code numérique est alors dangereuse. Nous tenterons, au cours des chapitres à venir, de faire ressortir dans quelles mesures nos observables expérimentales autorisent une comparaison quantitative avec leurs homologues synthétiques, et dans quels cas on ne peut s'attacher qu'à une comparaison qualitative.

En particulier une valeur donnée du rapport R/R_c ne correspond pas au même état de convection pour l'expérience et pour le code QG. L'origine de ce problème, une fois de plus, repose sur le fait que le champ de température et le flux de chaleur sont 3D dans une expérience de laboratoire, alors que l'on ne considère que des températures intégrées en z et un flux de chaleur équatorial dans notre code QG. Cette question est valable à la fois pour les mesures de température et les mesures de vitesse. Il faut alors, en se basant sur d'autres observables expérimentales telles que la vitesse, essayer de caler au mieux réalisations expérimentales et numériques.

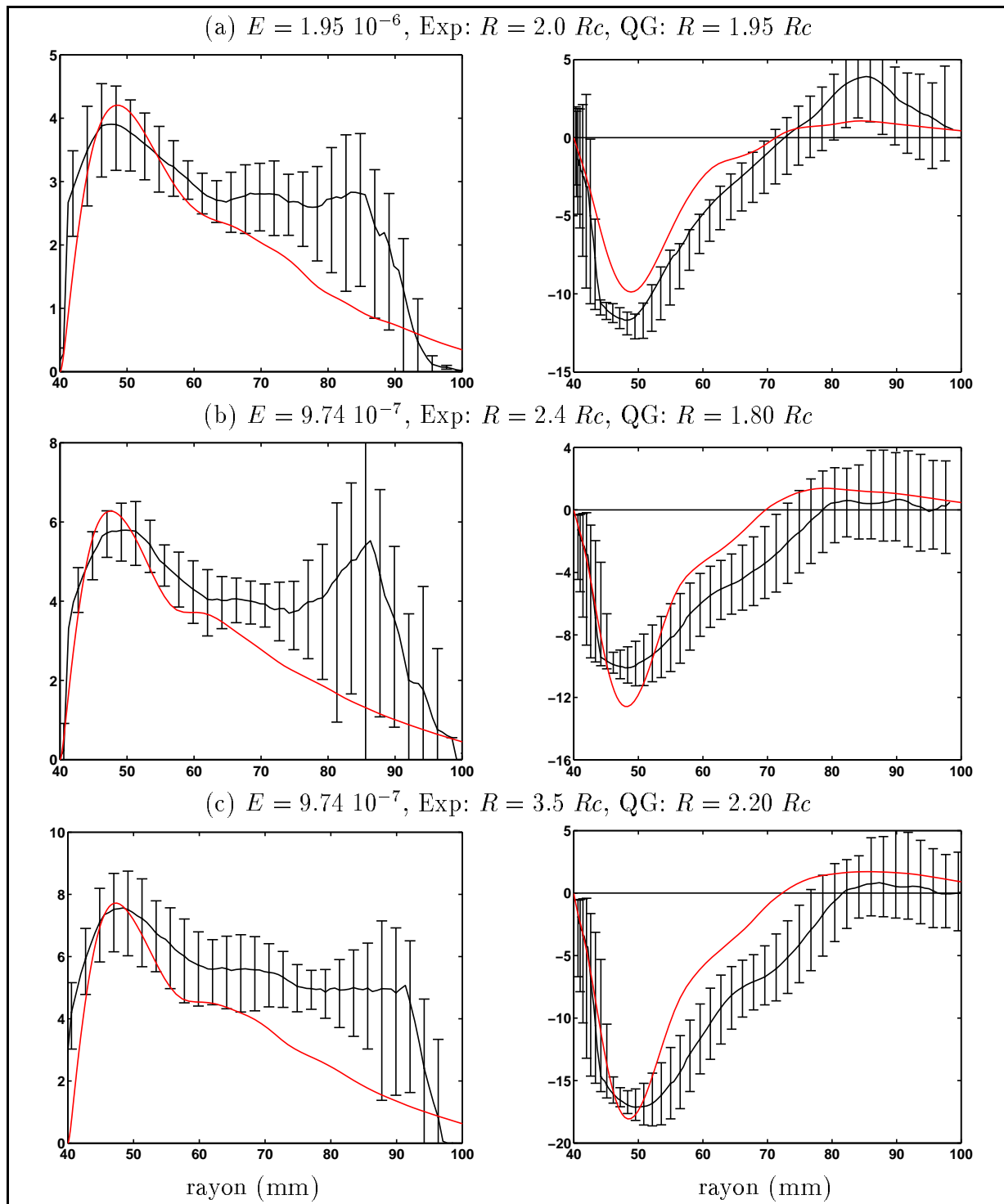


FIG. 3.6 – Exemples de profils (mm/s) de la vitesse radiale $U_s(s)$ (à gauche) et du vent zonal $U_\phi^0(s)$ (à droite), d'après des mesures expérimentales (noir) et des reconstitutions synthétiques QG (rouge), pour $P = 0.025$ et différentes valeurs de E et R/R_c (Exp: pour l'expérience; QG: pour les simulations numériques QG).

3.2.1 Validation par l'expérience du code QG à faible Prandtl

Vitesses convectives et zonales

En ce qui concerne les vitesses, il est possible de rattraper en partie ce problème en comparant, pour une valeur donnée des vitesses convectives, l'amplitude et la forme des profils de vitesse radiaux et azimutaux. C'est ce que nous présentons sur la figure 3.6 pour différentes valeurs de R/R_c et E . On remarquera tout d'abord un bon accord entre l'amplitude des vitesses zonales QG et expérimentales. Il est intéressant aussi de constater que les allures des profils numériques et expérimentaux sont assez proches, à ceci près que les profils QG sont légèrement plus "pointus". Ceci peut vouloir dire que la largeur de la zone convective est légèrement plus grande dans l'expérience que dans le code QG. C'est aussi ce que semble suggérer la comparaison des cartes spatio-temporelles expérimentales et synthétiques de vitesse radiales, comme celles présentées sur les figures 3.7 et 3.8. Par ailleurs, comme l'avaient déjà remarqué Aubert et al. [2001], la forme des profils expérimentaux et synthétiques ne varie pas de manière remarquable dans la gamme de ΔT explorée (cf les profils 3.6a et b). Cette observation nous a aussi guidé vers l'idée que la taille des structures évolue peu, comme nous l'avons précédemment vu dans le paragraphe 2.1.3.

Nous présentons sur les figures 3.7 ($E = 1.95 \cdot 10^{-6}$) et 3.8 ($E = 9.74 \cdot 10^{-7}$) des cartes spatio-temporelles synthétiques et expérimentales des vitesses radiales pour une valeur donnée de \hat{U}_s . La signature du passage d'un tourbillon devant la sonde est caractérisée par une alternance "rouge/bleu". On notera que les temps de passage des tourbillons sur les cartes expérimentales et numériques sont très semblables. En couplant cela au bon accord obtenu sur les vents zonaux, on peut en déduire que les tailles de tourbillon expérimentale et numérique sont proches l'une de l'autre.

S'il n'est pas envisageable de prouver expérimentalement les mises à l'échelles dérivées à l'aide des simulations QG dans la section 2.3.1, nous pouvons cependant vérifier si nos mesures sont compatibles avec un tel comportement. L'ensemble des mesures de vitesses radiales et azimutales est présenté sur la figure 3.9 en fonction de la distance relative au seuil de convection. Il semble à première vue que le paramètre $R/R_c - 1$ décrive assez bien dans quel état de convection se trouve le fluide, quel que soit le nombre d'Ekman, et ce pour les vitesses convectives et le vent zonal. Peut-on aller plus loin?

Nous rappelons ici que la mise à l'échelle (2.26) du nombre de Peclet local développée dans le paragraphe 2.3.1 s'écrit

$$\frac{\hat{U}_s L}{\kappa} \simeq 8.9 \left[\frac{R}{R_c} Nu - 1 \right]^{1/2}$$

A faible P , les vitesses radiales QG semblent tendre vers cette mise à l'échelle à mesure que le forçage augmente (cf la figure 2.13b). Plus précisément une régression logarithmique sur

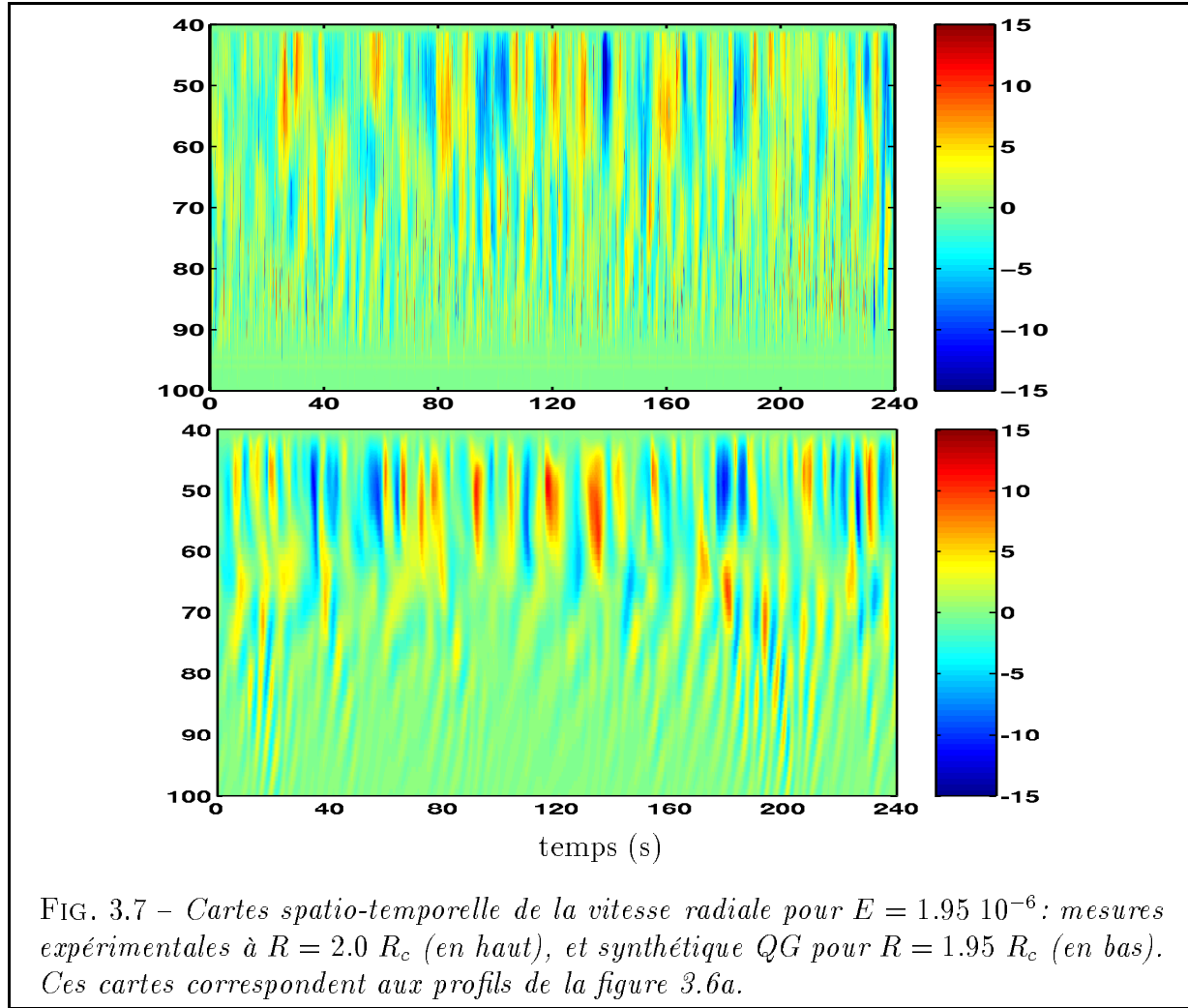


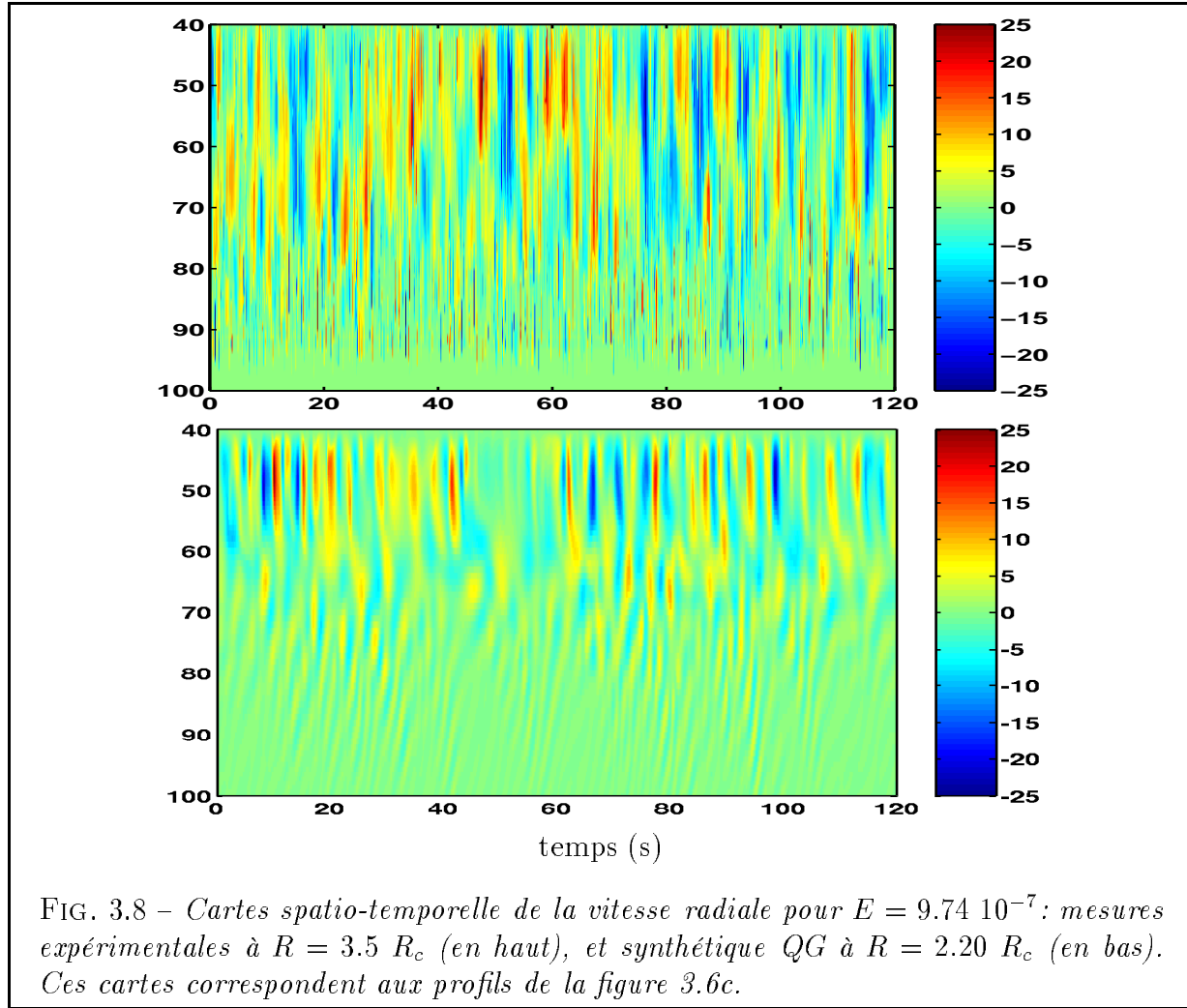
FIG. 3.7 – Cartes spatio-temporelle de la vitesse radiale pour $E = 1.95 \cdot 10^{-6}$: mesures expérimentales à $R = 2.0 R_c$ (en haut), et synthétique QG pour $R = 1.95 R_c$ (en bas). Ces cartes correspondent aux profils de la figure 3.6a.

nos simulations QG en gallium, pour $1.85 < R/R_c < 10$, nous donne (voir la figure 3.10b)

$$Pe_l^{QG} \simeq (6.3 \pm 0.6) \left[\left(\frac{R}{R_c} Nu \right)_{QG} - 1 \right]^{0.56 \pm 0.06}$$

Les expériences les plus loin du seuil ($R \simeq 4 R_c$ à 600 tpm) correspondent à des calculs à $R \simeq 2.5 R_c$, pour lesquels le nombre de Nusselt calculé vaut $Nu \simeq 1.25$. On peut donc considérer que le nombre de Nusselt reste proche de 1 dans nos expériences. Vu la faible gamme de R/R_c visitée dans l'expérience on peut, à partir des résultats précédents, estimer grossièrement le lien entre les valeurs expérimentales et numériques du rapport R/R_c . Le plus simple est de rechercher une dépendance linéaire de la fonction $R/R_c - 1$ entre 0 et les plus grandes valeurs expérimentales ($R/R_c \simeq 4$). On trouve

$$\left(\frac{R}{R_c} - 1 \right)_{exp} \simeq 2 \left(\frac{R}{R_c} - 1 \right)_{QG}$$



La mise à l'échelle précédente va alors se rapprocher de

$$\frac{\hat{U}_s L}{\kappa} \simeq 8.9 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_c} - 1 \right)_{exp} \right]^{1/2} \simeq 6.3 \left[\left(\frac{R}{R_c} \right)_{exp} - 1 \right]^{1/2}$$

Nous estimons une fois de plus que la taille L reste proche de la taille critique l_c , à partir de laquelle on construit le nombre de Peclet local pour l'expérience et les calculs QG. Une régression logarithmique sur l'ensemble des mesures de vitesse radiale nous donne (voir la figure 3.10a):

$$Pe_l^{exp} \simeq (4.8 \pm 1.0) \left[\left(\frac{R}{R_c} \right)_{exp} - 1 \right]^{0.45 \pm 0.10}$$

Nous n'entendons pas ici suggérer que les vitesses suivent cette loi. Nous voulons juste dire par là que nos mesures sont tout à fait compatibles avec les simulations QG, et qu'on

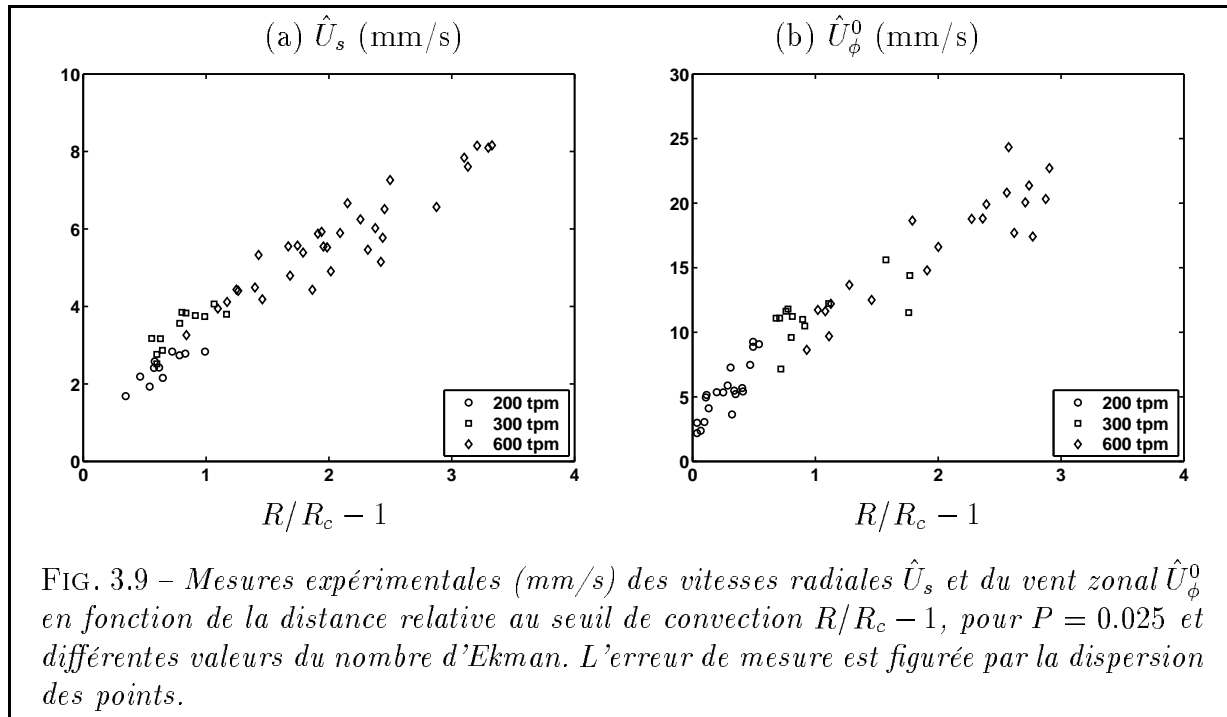


FIG. 3.9 – Mesures expérimentales (mm/s) des vitesses radiales \hat{U}_s et du vent zonal \hat{U}_ϕ^0 en fonction de la distance relative au seuil de convection $R/R_c - 1$, pour $P = 0.025$ et différentes valeurs du nombre d'Ekman. L'erreur de mesure est figurée par la dispersion des points.

peut donc s'attendre à ce que les vitesses convectives à grand forçage et faible Prandtl se rapprochent de l'échelle (2.26) proposée dans la section 2.3.1.

En ce qui concerne les vitesses zonales, les calculs numériques suggèrent, dans le cas $P \ll 1$, $E^{-1/2} \overline{Re_l} \propto Re^x$ avec $x \simeq 1.3$. Il serait possible d'en sortir une dépendance analytique de $\overline{Re_l}$ en fonction de $\frac{R}{R_c} - 1$. Cependant au vu d'une part de la dispersion des points de la figure 3.9b, et d'autre part du nombre d'hypothèses successives à suivre pour arriver à une telle loi, nous doutons que cela ait beaucoup de sens.

Fluctuations de température

Pour les fluctuations de température, la comparaison directe est d'autant moins justifiée que notre mesure est locale, et ne doit en aucun cas être quantitativement comparable avec la température intégrée suivant la verticale. Nous tenterons tout de même de croiser ensemble certaines des caractéristiques expérimentales et numériques.

La première question que l'on peut se poser est la suivante: est-il normal d'observer des fluctuations de température sur la sphère externe comme celles présentées sur la figure 3.5b? En d'autres termes, quelle est la structure verticale de température d'un panache thermique qui part du cylindre tangent? En gallium nous restons proches du seuil, donc le champ de température ne doit pas beaucoup s'éloigner du champ statique. Si l'on se réfère à la coupe verticale de température statique présentée sur la figure 3.3a, on pourrait

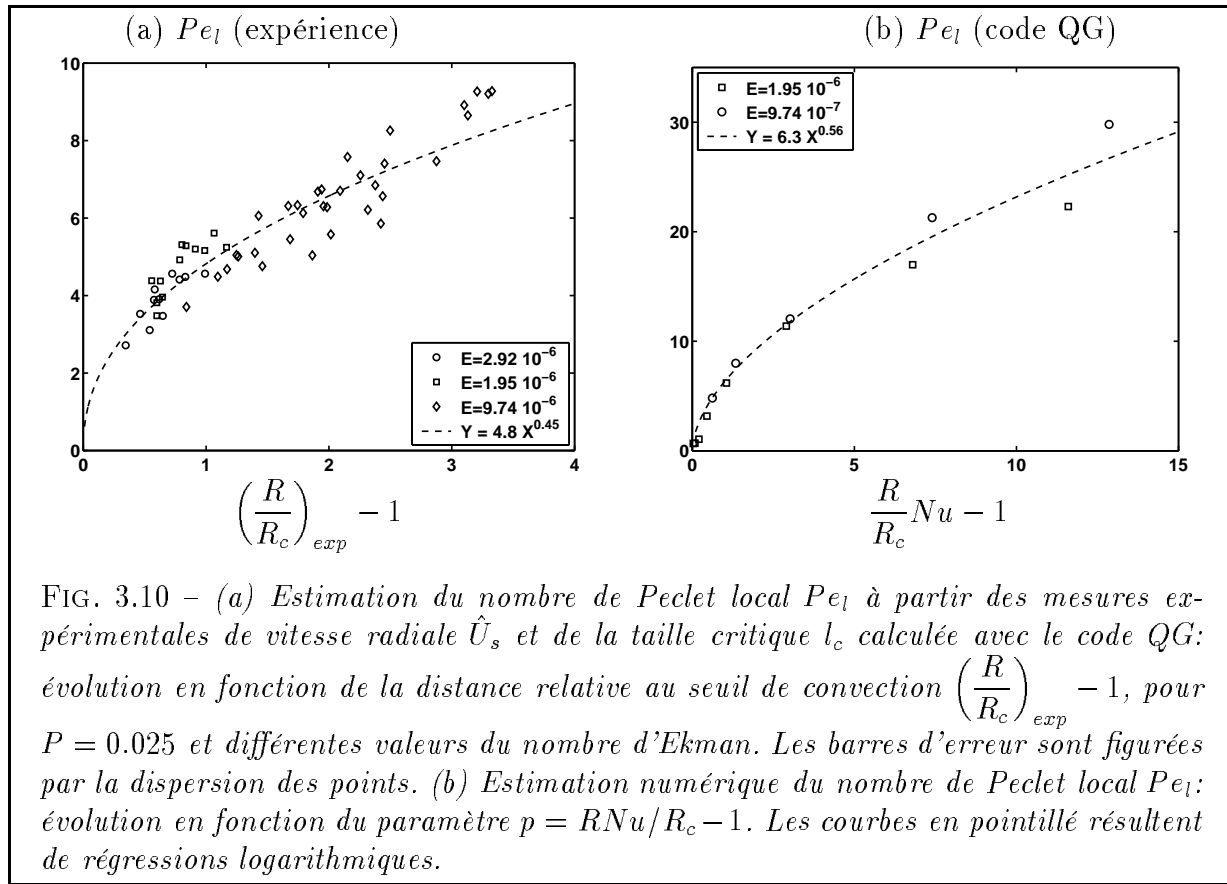
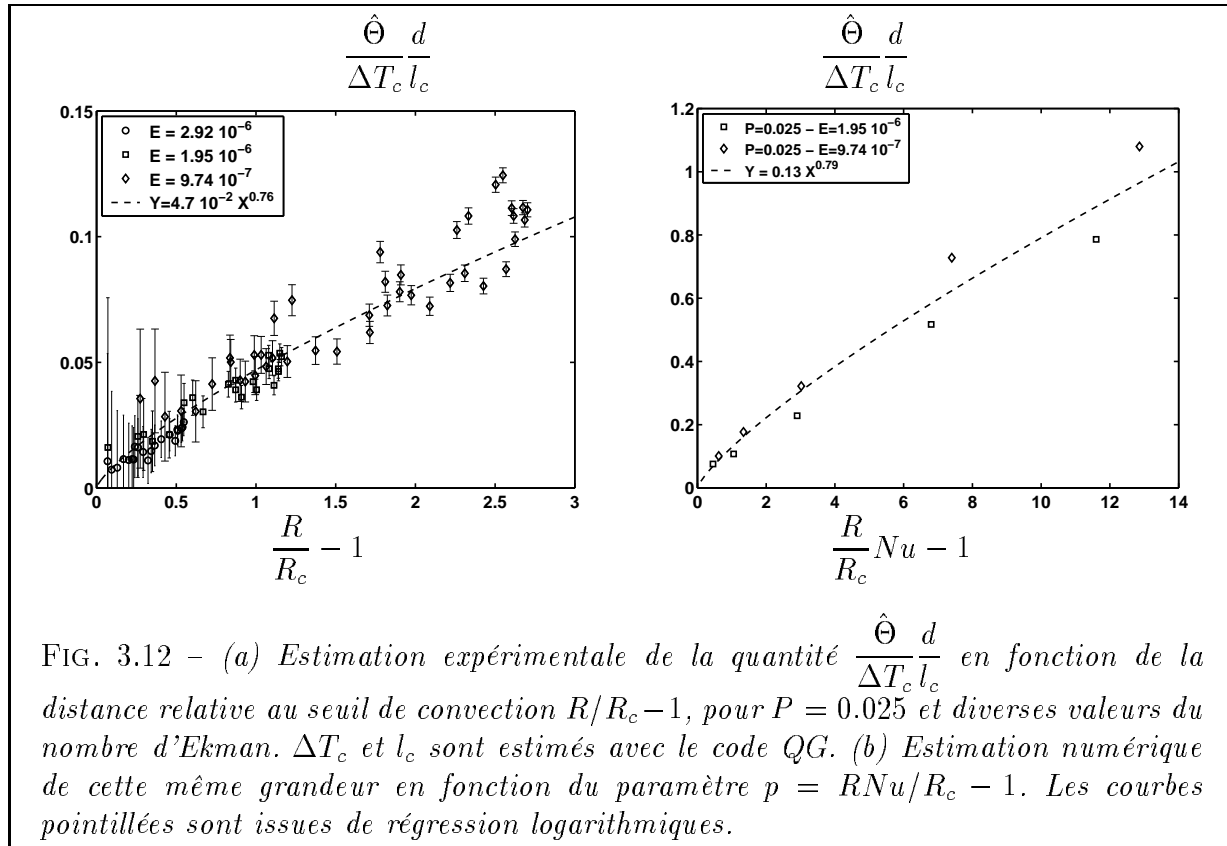
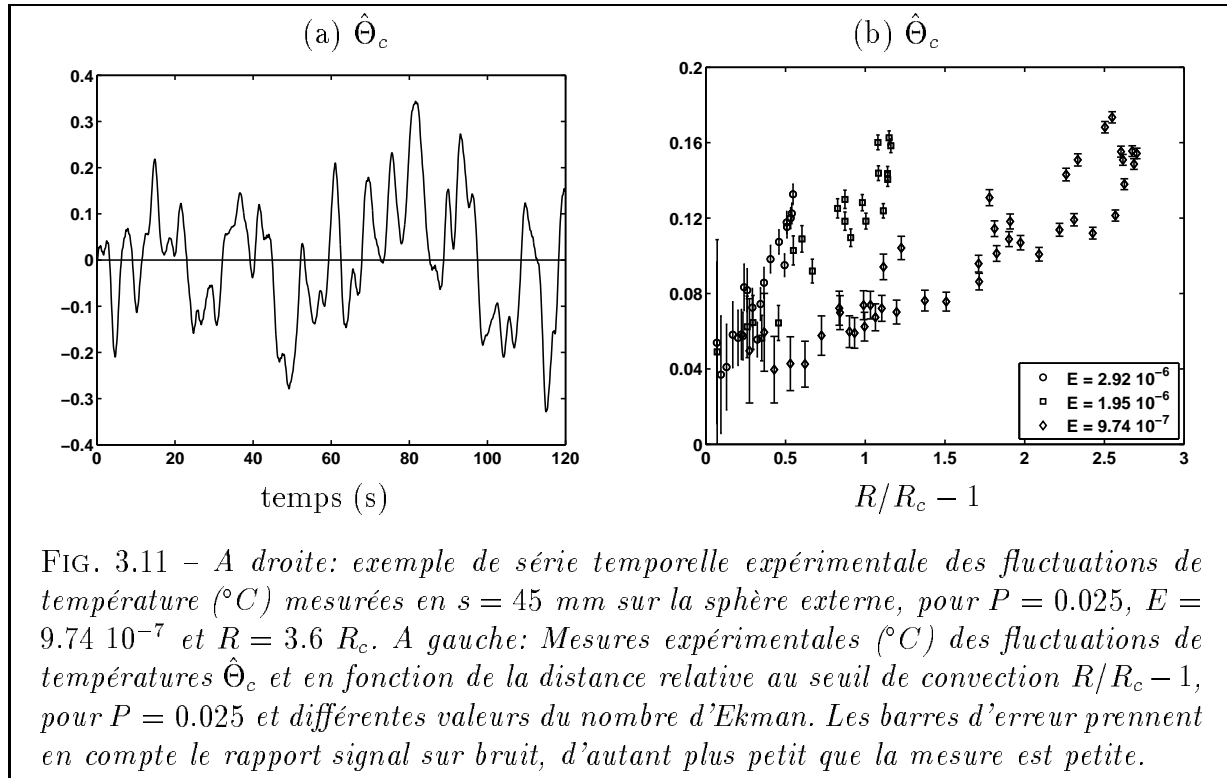


FIG. 3.10 – (a) Estimation du nombre de Peclet local Pe_l à partir des mesures expérimentales de vitesse radiale \hat{U}_s et de la taille critique l_c calculée avec le code QG: évolution en fonction de la distance relative au seuil de convection $\left(\frac{R}{R_c}\right)_{exp} - 1$, pour $P = 0.025$ et différentes valeurs du nombre d'Ekman. Les barres d'erreur sont figurées par la dispersion des points. (b) Estimation numérique du nombre de Peclet local Pe_l : évolution en fonction du paramètre $p = RNu/R_c - 1$. Les courbes en pointillé résultent de régressions logarithmiques.

penser qu'une colonne de fluide partant de $s = s_i$ advecte vers l'extérieur le profil vertical de température du cylindre tangent. Or les isothermes proches de la sonde (en $s = 45$ mm près de la sphère externe et du manchon) sont assez espacées les unes des autres et présentent une forte composante horizontale... Les fluctuations de température doivent alors être bien plus marquées à l'équateur que sur la sphère. On observe en fait des fluctuations de quelques dixièmes de degrés, comme on le voit sur la série temporelle de la figure 3.11. Ceci correspond à quelques pourcents du saut de température ΔT , ce qui est du même ordre de grandeur que les fluctuations de température synthétiques intégrées en z (voir pour cela la figure 2.7b).

On peut alors penser que l'origine de notre signal est ailleurs. En particulier les mouvements horizontaux des colonnes de fluides sont associées à des mouvements verticaux du fait des conditions aux limites (voir l'équation (2.23), partie I). Le pompage d'Ekman (d'ordre $u_z \sim E^{1/2} \hat{U}_c$) est trop faible. Par contre l'effet de pente (d'ordre $u_z \sim \eta \hat{U}_c$, avec $\eta \simeq 0.4$ près du cylindre) est assez efficace pour advecter une anomalie de température sur la hauteur d'une colonne sans que celle-ci ait le temps de diffuser en chemin.

L'ensemble des mesures de températures, quel que soit le nombre d'Ekman E , est présenté sur la figure 3.11b. Nous rappelons ici la mise à l'échelle (2.27) des fluctuations de



température issue de notre développement non-linéaire de la section 2.3.1, en notation dimensionnée:

$$\frac{\hat{\Theta}_c}{\Delta T_c} \frac{d}{L} \sim \left[\frac{R}{R_c} Nu - 1 \right]^{1/2}$$

A faible Prandtl, on ne s'attend pas à ce que les estimations numériques et expérimentales de $\hat{\Theta}_c$ suivent cette mise à l'échelle à la lettre. Par contre cela nous donne une idée des quantités à observer. Une régression logarithmique sur nos simulations QG en gallium, pour $1.85 < R/R_c < 10$, nous donne (voir la figure 3.12b)

$$\frac{\hat{\Theta}_c^{QG}}{\Delta T_c} \frac{d}{l_c} \simeq (12.8 \pm 2.3) 10^{-2} \left[\left(\frac{R Nu}{R_c} \right)_{QG} - 1 \right]^{0.79 \pm 0.09}$$

D'autre part une régression logarithmique sur l'ensemble des mesures de température (quel que soit E) nous donne (voir la figure 3.12a):

$$\frac{\hat{\Theta}_c^{exp}}{\Delta T_c} \frac{d}{l_c} \simeq (4.6 \pm 1.0) 10^{-2} \left[\left(\frac{R}{R_c} \right)_{exp} - 1 \right]^{0.79 \pm 0.12}$$

NB: Les barres d'erreur sur cette régression ne prennent en compte que la dispersion des points. Si nous considérons, comme nous l'avons fait précédemment pour les mesures de vitesse, que $Nu \simeq 1$ et $(R/R_c - 1)_{exp} \simeq 2 (R/R_c - 1)_{QG}$, on peut en conclure que ces deux comportements sont compatibles. Encore une fois nous ne voulons pas affirmer ici que les fluctuations de température doivent suivre une telle tendance. C'est juste une façon de dire que nos mesures expérimentales sont compatibles avec la description numérique du chapitre précédent, ce qui valide par là même le comportement thermique de notre code QG de convection.

3.2.2 Etonnants comportements convectifs en eau

Les résultats présentés maintenant concernent la convection très surcritique en eau ($P = 7.0$). Ils sont constitués de mesures de vitesses convectives et de vent zonal. La technique est la même que celle décrite en gallium, à ceci près que les particules en suspension qui rétrodiffusent le signal sont des petits grains de pollen, et que la qualité de la mesure est bien meilleure qu'en gallium. Nous cherchons ici à décrire qualitativement quelques comportements encore incompris. Une étude mieux documentée est nécessaire pour aller plus loin.

Vents zonaux affolés et jets multiples

Par convection très développée, nous entendons ici des expériences jusqu'à 60 fois surcritiques. Le principal point d'interrogation est présenté sur la figure 3.13a, où l'on a tracé

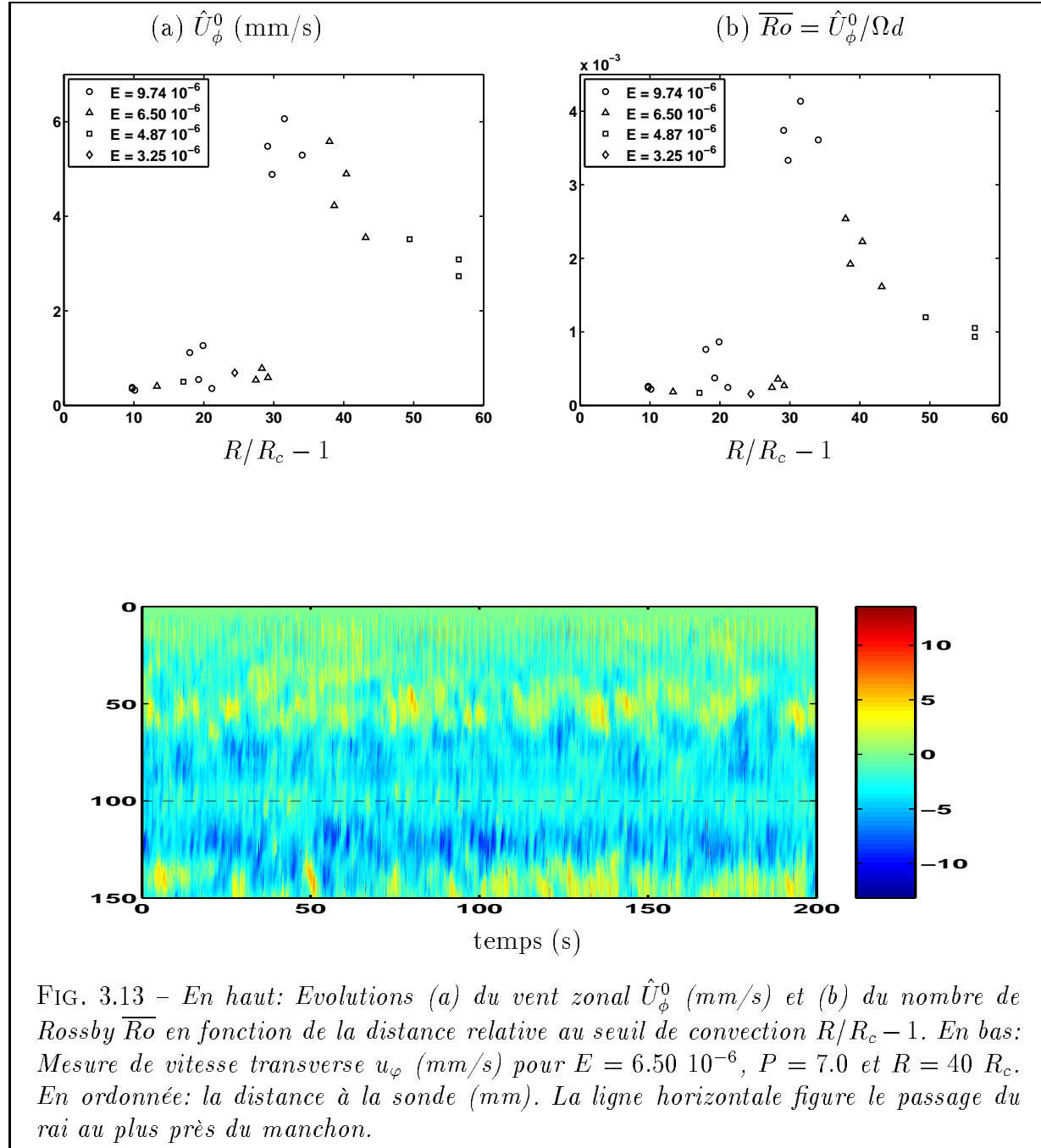


FIG. 3.13 – En haut: Evolutions (a) du vent zonal \hat{U}_ϕ^0 (mm/s) et (b) du nombre de Rossby \overline{Ro} en fonction de la distance relative au seuil de convection $R/R_c - 1$. En bas: Mesure de vitesse transverse u_φ (mm/s) pour $E = 6.50 \cdot 10^{-6}$, $P = 7.0$ et $R = 40 R_c$. En ordonnée: la distance à la sonde (mm). La ligne horizontale figure le passage du rai au plus près du manchon.

l'amplitude \hat{U}_ϕ^0 du vent zonal en fonction de la distance au seuil, pour différents taux de rotation. Il semble tout d'abord que l'amplitude du vent zonal dépende principalement de la distance au seuil, et ce quelque soit E . Ensuite un comportement complètement inattendu se produit vers $R = 30 R_c$: un saut brutal de l'amplitude, avant une décroissance lente de celle-ci. Ces mesures sont effectuées sur des plages de temps de plusieurs minutes, alors qu'il nous semble avoir atteint un régime stationnaire. S'il s'agit d'un phénomène transitoire, il est donc très lent. Ce ne serait pas forcément à exclure puisque le temps thermique en eau est grand: $\tau_\kappa \sim L^2/\kappa \sim 12$ min pour $L = 1$ cm. Cependant il serait étrange qu'un phénomène transitoire ne présente aucune décroissance dans le temps sur plusieurs minutes d'enregistrement. Un exemple de mesure sur la sonde transverse est présenté sur la figure 3.15 pour un nombre de Rayleigh 40 fois critique.

Il n'est pas encore sûr que ce saut de vent zonal ait lieu exactement pour la même valeur de R/R_c quel que soit le taux de rotation. Nous n'avons par ailleurs pas suffisamment de mesures de vitesse radiales pour trancher si oui ou non les vitesses convectives présentent le même type de comportement. Il semble cependant que ce ne soit pas le cas. Pour plus de précisions sur le comportement de la convection avant et après le saut à $R = 30 R_c$, regardons de plus près quelques profils typiques.

Nous présentons tout d'abord sur la figure 3.14 des profils de vitesse radiale et de vent zonal avant le saut à $R = 30 R_c$. Nous n'avons pas assez de mesures pour effectuer des comparaisons fines entre les expériences et le code QG. De plus pour des simulations aussi loin du seuil le nombre de Nusselt devient nécessairement grand, ce sur quoi nous n'avons aucune information. Sans pouvoir affirmer que l'accord est bon entre ces mesures et nos simulations QG, on peut tout de même dire que l'amplitude des vitesses zonales et convectives semble être du même ordre de grandeur. Par ailleurs les formes des profils expérimentaux et numériques sont tout à fait comparables. Non seulement les profils de vitesse radiales se ressemblent, mais aussi les simulations QG produisent des jets multiples très proches de ce que nous observons expérimentalement!

Penchons nous maintenant sur le cas des expériences au dessus de $R = 30 R_c$. La figure 3.15 présente une carte spatio-temporelle de vitesses radiales mesurée à $E = 6.50 \cdot 10^{-6}$ et $R = 41.6 R_c$, ainsi que les profils de vitesse radiale U_s , de vent zonal U_ϕ^0 et de vitesse transverse U_φ dans les mêmes conditions. Plusieurs choses sont à remarquer. Tout d'abord l'amplitude du vent zonal est du même ordre de grandeur que la vitesse convective (4 mm/s). Ceci est très étonnant au vu des calculs numériques. En effet pour des simulations en eau présentant des vitesses convectives de cet ordre, l'amplitude du vent zonal est encore 10 fois plus faible. Il est intéressant de remarquer que ce comportement n'est pas non plus reproduit par les simulations 3D très surcritiques de Christensen [2002] en présence de conditions de surface libre.

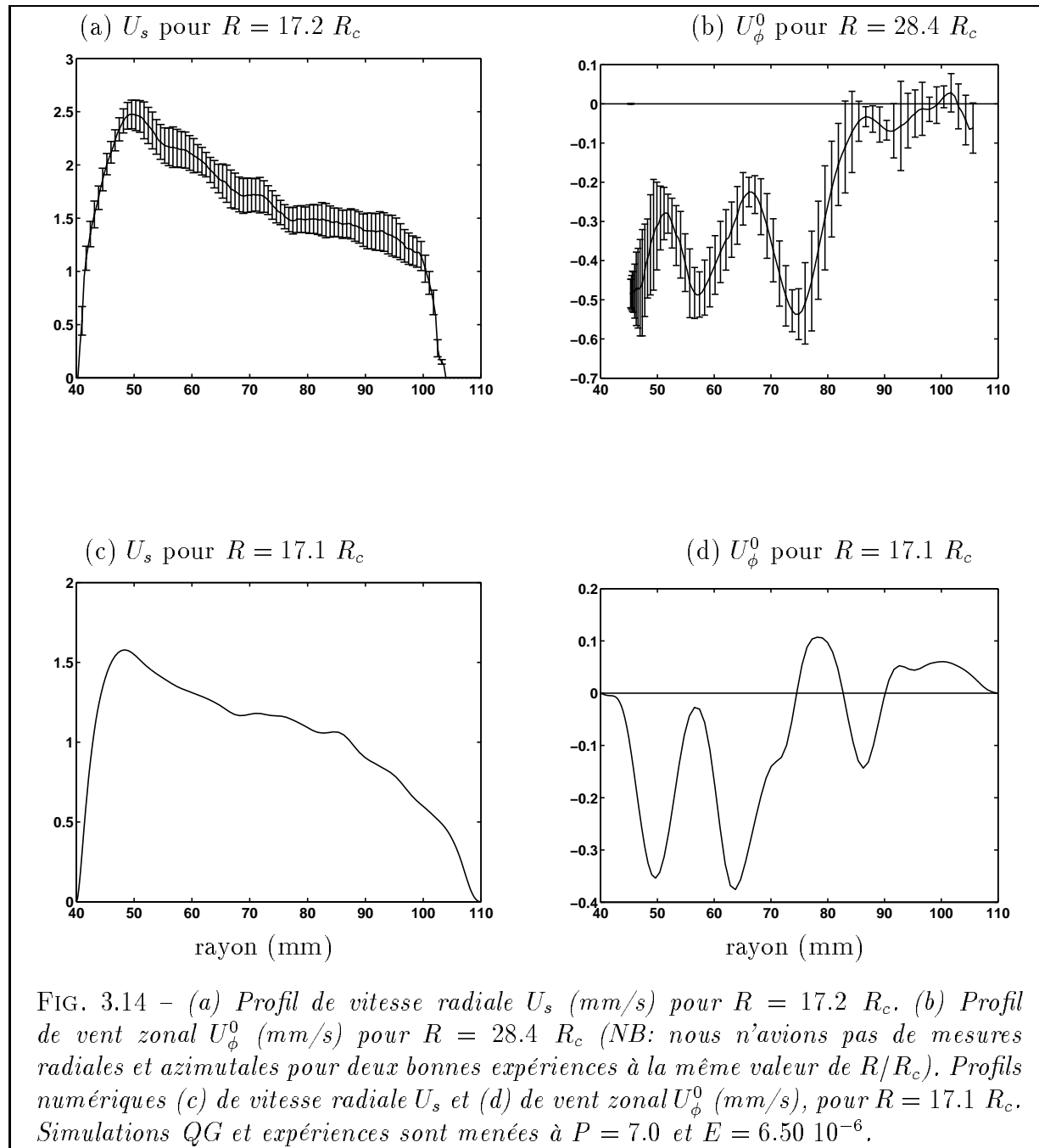
Ces résultats peuvent être mis en parallèle avec les expériences de convection en rotation rapide (en eau) de Manneville and Olson [1996], où des jets multiples ont aussi été observés dans une géométrie un peu différente puisqu'ils ont utilisé un rapport d'aspect plus grand

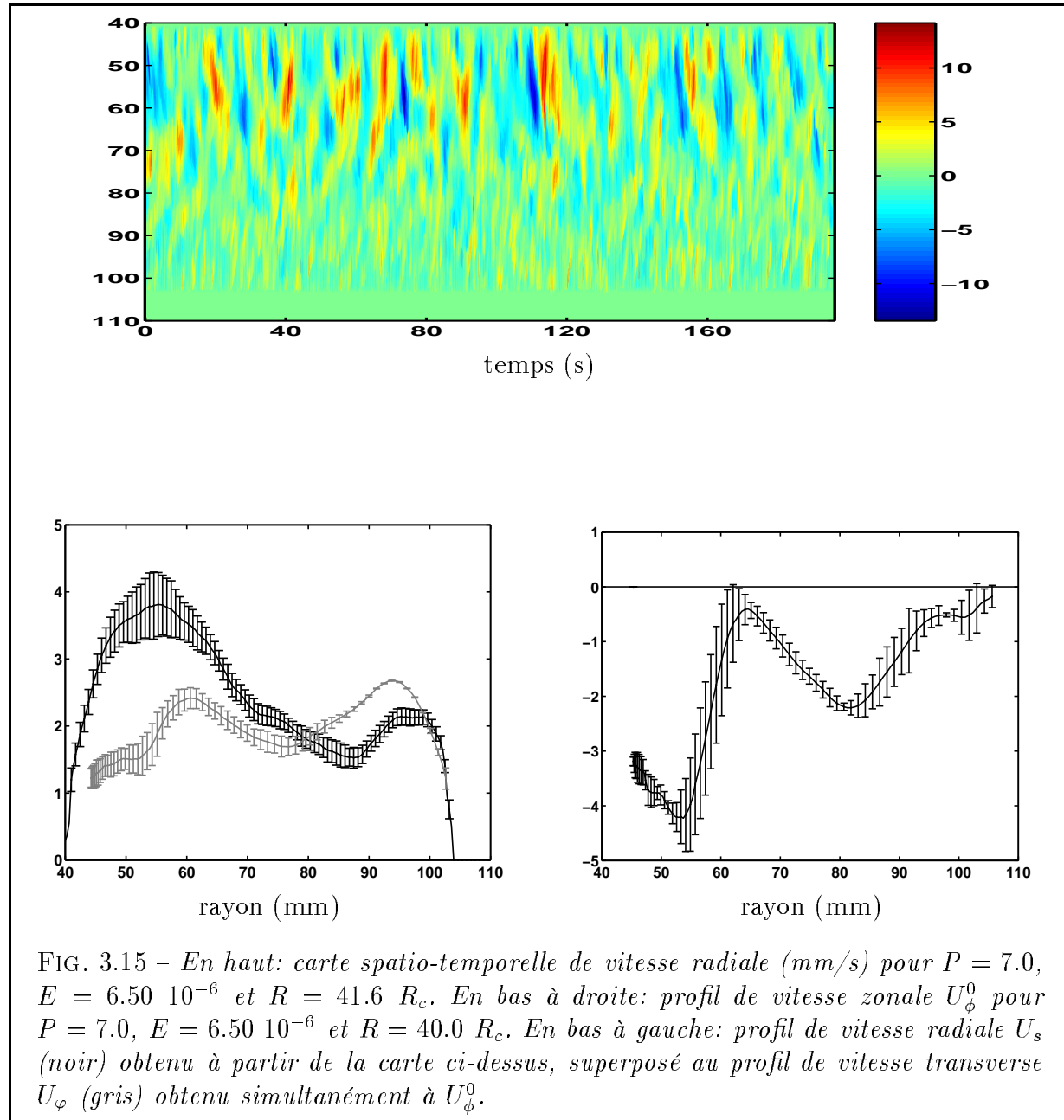
que dans notre expérience. D'après leurs mesures le nombre de jets semble augmenter à mesure que R/R_c augmente et E diminue, ce qui est compatible avec nos résultats numériques de la section 2.4. Leurs mesures semblent montrer que le nombre de Rossby axisymétrique $\overline{Ro} = \hat{U}_\phi^0/\Omega d$ dépend principalement de R/R_c . Ceci n'est pas incompatible avec nos mesures, comme le montre la figure 3.13b. Plus de données sont nécessaires pour trancher sur ce point. Par contre leurs résultats montrent une augmentation régulière de \overline{Ro} avec R/R_c , suivie d'une saturation au delà d'une certaine valeur de R/R_c , ce qui ne correspond pas du tout à nos observations.

Naissance d'une onde près de l'équateur?

Une autre observation étonnante concerne la seconde bosse observée près de la sphère externe ($s \in [85 - 105]$ mm), à la fois sur le faisceau radial et sur le rai transverse. Ces fluctuations, tout de même assez intenses (2 mm/s), ne sont pas associées à la génération de vent zonal. Ce dernier est effectivement faible à ces rayons. En regardant de près la carte de vitesse radiale, on notera un battement d'assez haute fréquence aux grands rayons (de l'ordre de 0.5 Hz, à savoir 10 fois plus faibles que la fréquence de rotation); ces mouvements semblent alors associés à une onde. On pense ici à une onde de Rossby thermique. Il est difficile de comparer cette fréquence à celle décrite par l'approche de Busse [1970] puisque près de l'équateur les mouvements sont nécessairement 3D. Une haute fréquence est cependant logique puisque la pulsation d'une onde de Rossby augmente avec l'effet β , donc avec la pente. On imagine que la convection, en devenant intense, colonise toute la sphère, ce qui pourrait exciter ces ondes. Notons que l'on a pu remarquer ce comportement avant et après le saut à $R = 30 R_c$.

On notera aussi que les vitesses transverses semblent plus grandes que les vitesses radiales à cet endroit. Ceci implique que les vitesses transverses sont marquées par une importante composante azimutale de la vitesse convective. Cette différence d'amplitude entre les composantes radiales et azimutales de la vitesse convective peut aussi être expliquée par l'influence de la pente. En effet les vitesses radiales sont nécessairement associés à d'importants mouvements verticaux quand η devient grand. Ces mouvements brisent alors la contrainte de Proudman-Taylor. Les vitesses u_ϕ ne sont quant à elles pas liées à un tel problème.





Conclusions sur la convection en rotation rapide

Nous avons dans cette partie étudié la convection dans une sphère en rotation rapide, à l'aide d'un code numérique Quasi-Géostrophique et d'expériences de laboratoire en eau et en gallium. Nous avons tout d'abord montré qu'en intégrant la friction de couche limite (le pompage d'Ekman) pour l'ensemble de l'écoulement, on retrouvait alors des résultats QG linéaires encore plus proches des résultats numériques tri-dimensionnels.

Nous avons ensuite effectué une étude numérique QG de convection développée pour divers nombres de Prandtl. Une étude à $P = 7.0$ nous indique que l'amplitude des vitesses et des perturbations de température semble s'organiser autour des non-linéarités thermiques. A partir de nos calculs nous élaborons une loi d'échelle qui dépend principalement de la taille d'injection $L \sim \beta^{1/3}$ et de la distance relative au seuil de convection.

Nous nous lançons ensuite dans une étude QG à $P = 0.025$, pour laquelle des études faiblement non-linéaires ont montré que le vent zonal joue un rôle déterminant. Nous montrons que ce rôle tend à s'estomper à mesure que les écoulements deviennent turbulents. Les vitesses convectives tendent alors vers un comportement compatible avec la mise à l'échelle effectuée à grand nombre de Prandtl. Dans cette description, les non-linéarités dynamiques (le tenseur de Reynolds) ont un rôle de mixage.

Nous avons par la suite comparé ces résultats numériques avec nos mesures expérimentales. Nos expériences en gallium ont reproduit des comportements tout à fait comparables avec ceux de nos simulations QG, tant du point de vue de la dynamique que du point de vue de la thermique. Par là même elles valident notre code QG à faible Prandtl. Nous restons tout de même assez proche du seuil de convection.

Nos expériences très surcritiques en eau montrent des comportements étonnants, qui ne rentrent aujourd'hui dans aucun cadre. En particulier nous observons des vents zonaux très intenses au delà d'une certaine valeur du rapport R/R_c . Ceci nécessite de nouvelles expériences pour tenter de mieux contraindre ces phénomènes. Cela veut peut-être dire aussi que nos modèles numériques passent à côté d'un phénomène.

Il est important de noter tout de même que nous avons observé expérimentalement en eau

des vents zonaux présentant des jets multiples assez semblables à ceux obtenus numériquement. Ce comportement est à relier avec les observations des atmosphères des géantes gazeuses comme Saturne ou Jupiter.

Nous allons dans la prochaine partie, consacrée au cas magnétique, tenter de comprendre comment ces divers comportements sont modifiés par la présence d'un champ magnétique.

Troisième partie

MAGNETO-CONVECTION DANS UNE SPHERE EN ROTATION RAPIDE

Introduction

Nous passons dans cette partie à l'étude de la magnéto-convection en rotation rapide. Nous allons donc tenter de caractériser l'influence d'un champ magnétique imposé sur les écoulements décrits dans la partie précédente. Il faut comprendre par là que nous ne nous attaquons pas directement à un problème de "dynamo". En effet si les écoulements que nous regardons, en présence d'un champ imposé, induisent des courants électriques, le champ magnétique induit par ces courants restera faible devant le champ imposé. On oubliera donc la rétroaction des écoulements sur le champ magnétique imposé.

Rappelons d'abord que dans le cas des métaux liquides, le temps de diffusion magnétique L^2/λ est plusieurs ordres de grandeur plus court que le temps de diffusion visqueux L^2/ν , avec L la taille caractéristique des structures (de l'ordre du centimètre). Ceci est mesuré par le nombre de Prandtl magnétique

$$P_m = \frac{\nu}{\lambda}$$

voisin de $O(10^{-6})$ dans les métaux liquides. En considérant des vitesses typiques $U \sim 10^{-2} \text{ m/s}$, $L \sim 10^{-2} \text{ m}$ et la diffusivité magnétique du gallium donnée dans le tableau 3.2 (partie II) on obtient l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds magnétique local

$$R_m = \frac{UL}{\lambda} \sim O(10^{-3}) \quad (5)$$

Nos expériences et calculs numériques se situent alors dans une gamme où le champ magnétique induit \mathbf{b} reste bien plus faible que le champ imposé \mathbf{B}_0 . On peut en effet estimer à partir de l'équation d'induction (1.7)_I le champ induit dans le coeur du fluide, et on trouve

$$b \sim R_m B_0 \quad (6)$$

Pour un champ magnétique imposé typique de l'ordre de 10^{-2} T , le champ induit se trouve être de l'ordre de 10^{-5} T dans le meilleur des cas.

Nous décrirons tout d'abord dans le premier chapitre les modifications que nous avons dû amener, à la fois au code numérique de convection QG et à notre expérience, pour passer de la convection à la magnéto-convection. Nous présenterons ensuite dans le chapitre 2

l'impact d'un champ magnétique sur le seuil d'instabilité, à partir des résultats asymptotiques établis par Soward [1979] et Fearn [1979]. L'étude de la convection développée fera l'objet du chapitre 3. Nous commencerons par l'exploitation des mesures expérimentales dans la limite dite des "champs faibles". Ceci permettra de valider notre code de magnéto-convection par comparaison avec les expériences. Nous étudierons ensuite à l'aide de ce code numérique la convection développée en présence d'un champ magnétique dit "fort".

Chapitre 1

Intégration de la force de Lorentz

1.1 Implémentation numérique de la force de Lorentz

Nous cherchons ici à développer des calculs numériques dans le cas où le champ magnétique induit \mathbf{b} reste bien plus faible que le champ imposé \mathbf{B}_0 . Comme nous imposons un champ magnétique irrotationnel ($\nabla \times \mathbf{B}_0 = 0$) les seuls courants électriques présents dans le liquide seront associés au champ induit:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{b} \quad (1.1)$$

Nous imposons une condition de non-pénétration des courants électriques aux parois du domaine

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.2)$$

avec \mathbf{n} la normale aux parois (sphère extérieure et cylindre tangent). Ainsi il n'est pas possible de suivre l'approche de Petry et al. [1997], qui avaient tiré parti de l'invariance suivant z du champ induit dans le cas de frontières parfaitement conductrices. L'étude de l'effet de frontières conductrices dans une couche plane en rotation par Zhang et al. [2004], a montré que le seuil pouvait varier de façon importante selon la conductivité des frontières.

On doit décrire le champ induit dans tout le volume (la boule tronquée du cylindre tangent). On représente la force de Lorentz $\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0$ en partant de la loi d'Ohm (1.5)_I, qui s'écrit ici:

$$\mathbf{j} = \sigma (-\nabla V + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0)$$

L'utilisation d'un potentiel électrique V pour décrire le champ électrique est possible dans la limite où l'équation (1.1)_I se réduit à $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, i.e. $\frac{b}{T} \ll \frac{E}{L}$, avec T et L les temps et

tailles caractéristiques. Les courants électriques prennent naissance dans la force électromotrice $\sigma \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0$. La présence du champ électrique \mathbf{E} résulte alors de la condition de non-pénétration (1.2). Son amplitude peut donc être évaluée comme $E \sim UB_0$. Si l'on estime le champ induit à partir de (6), associé à un temps caractéristique $T \sim L/U$, il vient que l'utilisation d'un potentiel est valide dans la limite $R_m \ll 1$, ce qui sera le cas dans notre étude.

La géométrie du champ nous est imposée par l'expérience (voir le paragraphe 1.2 pour la description expérimentale; ce choix est discuté en 1.2.2). Nous écrivons celui-ci

$$\mathbf{B}_0 = B^* \frac{s^*}{s} \mathbf{e}_\phi \quad (1.3)$$

avec B^* l'intensité du champ au rayon cylindrique s^* . On choisit arbitrairement $s^* = 5$ cm, pas trop loin du cylindre tangent, au coeur de la zone convective. Dès lors ce travail se démarque d'autres études de magnéto-convection QG à faible nombre d'Ekman, comme par exemple celle de Abdulrahman et al. [2000], qui utilisent un champ de Malkus (comportement linéaire $B_0 \propto s$). De même que dans Petry et al. [1997], nous dimensionnons ainsi le champ magnétique global

$$\begin{cases} \mathbf{B} = B^* (\hat{\mathbf{B}}_0 + P_m \hat{\mathbf{b}}) \\ \mathbf{j} = J^* (-\nabla \hat{V} + \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{B}}_0) = J^* \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \quad (1.4)$$

avec $J^* = \frac{\sigma B^* \kappa}{d}$. NB: A partir de maintenant on ne considère que des grandeurs adimensionnées et l'on note $\hat{X} = X$.

Nous estimons que l'effet Joule, qui pourrait ajouter localement du chauffage interne, reste négligeable dans notre gamme de paramètres et nous n'essayons donc pas de le modéliser (voir la section 1.2.3). Par ailleurs dans les simulations effectuées, nous considérerons que la force de Lorentz reste faible devant la force de Coriolis. Cette condition est nécessaire pour que le modèle QG que nous utilisons reste valable. Elle est mesurée par le nombre d'Elsasser

$$\Lambda = \frac{\sigma B^{*2}}{\rho \Omega}.$$

qui doit rester petit devant 1. Les couches limites visqueuses restent de type Ekman et non pas Hartmann, comme cela serait le cas à fort Λ . Notons au passage qu'un champ magnétique azimuthal n'aura pas d'influence directe sur les mouvements zonaux. En conséquence de quoi la seule modification à introduire dans le code de convection QG concerne l'équation de vorticité ( quation (2.25), partie I), dans laquelle il faut ajouter au membre de droite

$$\mathcal{L} = \frac{\Lambda}{E} \frac{1}{2H} \int_{-H+\delta_\varepsilon}^{+H-\delta_\varepsilon} \nabla_\times [\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0] \cdot \mathbf{e}_z dz$$

qui se réduit à

$$\mathcal{L} = \frac{\Lambda}{E} \frac{s^*}{s} \frac{1}{2H} \int_{-H+\delta_\varepsilon}^{+H-\delta_\varepsilon} \frac{1}{s} \frac{\partial j_z}{\partial \phi} dz$$

En reprenant la notation en fonction courant ψ (équation (2.3), partie I), la décomposition spectrale en ϕ (équation 2.27), partie I) pour ψ et un développement analogue pour V :

$$V(s, \phi, z, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=-M}^{m=+M} V_m(s, z, t) e^{-im\phi}$$

on obtient finalement l'expression

$$\mathcal{L} = \frac{\Lambda}{E} \frac{ims^*}{s^2} \left[\frac{ims^*}{s^2} \psi_m + \frac{[V_m]_{-H+\delta_\varepsilon}^{+H-\delta_\varepsilon}}{2H} \right] \quad (1.5)$$

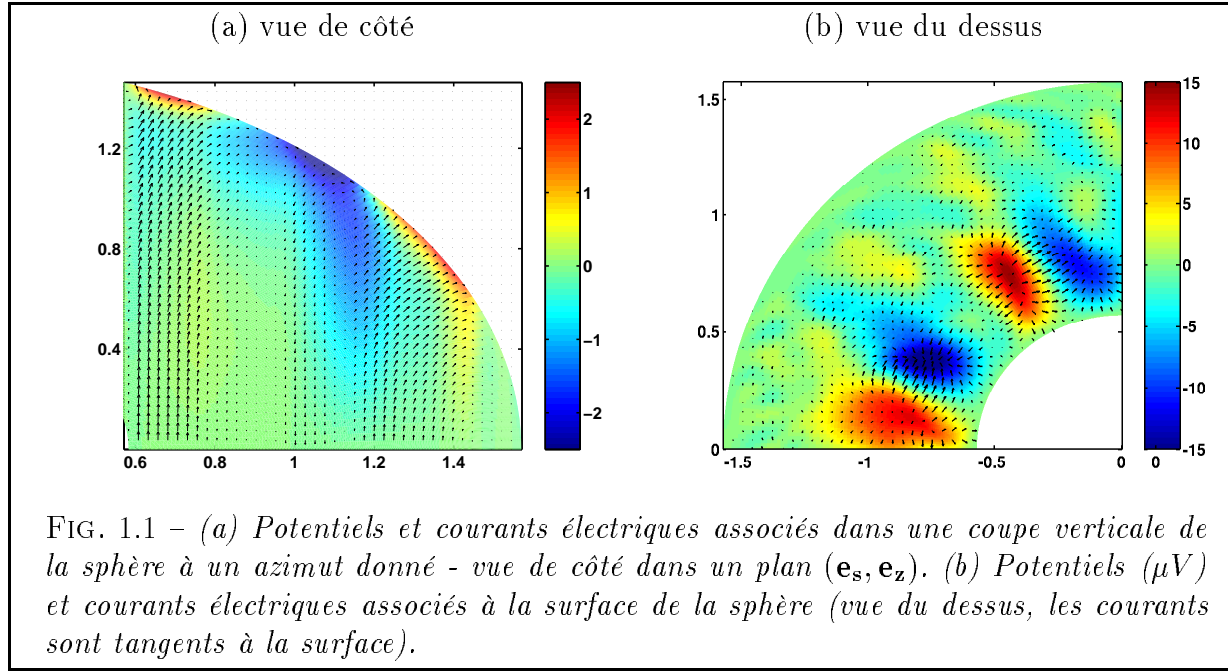
que l'on intègre au code numérique avec un schéma explicite d'Adams-Bashforth. Pour un champ de vitesse donné, le potentiel V est décrit sur une grille sphérique (r, θ, ϕ) et calculé pour chaque mode $m \neq 0$ à l'aide d'une méthode "SOR" (*Successive Over-Relaxation method*, voir l'annexe A). En prenant en compte le fait que les vitesses sont intégrées suivant z et la conservation des courants électrique $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ dans le volume, on arrive à

$$\Delta V = \mathbf{B}_0 \cdot \nabla_\times \mathbf{u} = -\frac{s^*}{s} \frac{\partial u_z}{\partial s}$$

où $u_z(s, \phi, z, t)$ est exprimé à partir des conditions aux limites de non-pénétration (2.23)_I en négligeant le pompage d'Ekman. On en déduit l'équation à résoudre pour connaître V dans l'ensemble du volume:

$$\Delta V = \frac{s^*}{s} z \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\eta}{H} u_s \right) \quad (1.6)$$

Notons que cette équation est anti-symétrique en z . Alors nécessairement V est nul à l'équateur et il suffit d'appliquer la méthode SOR à (1.6) que dans un seul hémisphère. Un exemple de carte de potentiels (avec les courants électriques associés) est présenté sur la figure 1.1. On y voit entre autre les courants électriques, verticaux dans le coeur du fluide (figure 1.1a), s'incurver à l'approche de la sphère externe isolante. On observe par ailleurs (figure 1.1b) les courants électriques tangents à la surface de la sphère se déverser des potentiels positifs aux potentiels négatifs. De la même manière que dans l'étude d'un tourbillon en présence d'un champ transverse par Brito et al. [1995], la force de Lorentz est dominée dans le coeur du fluide par la force électromotrice (f.e.m.), c'est à dire que $\mathbf{j} \simeq \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0$. Près des frontières, les conditions aux limites isolantes imposent un potentiel qui doit contrer la composante de la f.e.m. normale aux parois. Nous aboutissons finalement à un code hybride où les mouvements sont décrits par une approche quasi-géostrophique et les courants induits sont calculés en 3D.



1.2 Passage à la magnéto-convection expérimentale

1.2.1 Le champ magnétique imposé

Notre expérience de magnéto-convection en rotation rapide est issue de la transformation, non sans douleur, de l'expérience de convection décrite dans la section 3.1, partie II. Pour s'en rendre compte on peut juste comparer les deux photos des Figures 3.1a (partie II) et 1.2a. Nous avons fait passer N fils de cuivre vernis d'un isolant ($N = 444$) dans le circuit de refroidissement, entre l'arbre et le cylindre tangent (voir le schéma de la figure 1.2b). Ces fils bouclent à l'extérieur et forment un solénoïde qui se referme sur lui-même. En appliquant le théorème d'Ampère à un disque de rayon s et de surface Σ , orthogonal à $\mathbf{\Omega}$, on peut calculer le champ magnétique \mathbf{B}_0 qui apparaît lorsque l'on fait passer une intensité I dans les fils:

$$\int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.7)$$

avec \mathcal{C} le contour délimitant Σ . Tant que le contour \mathcal{C} reste à l'intérieur du solénoïde, (1.7) peut s'écrire de manière générale

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{B}_0(s, \phi, z) \cdot \mathbf{e}_{\phi} s d\phi = \mu_0 N I \text{ pour } s \in [s_i, s_e] \quad (1.8)$$

Le membre de droite de (1.8) est indépendant de z , et notre problème est à symétrie de révolution autour de $\mathbf{\Omega}$. Alors on obtient

$$\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{e}_{\phi} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi s} \text{ pour } s \in [s_i, s_e]$$

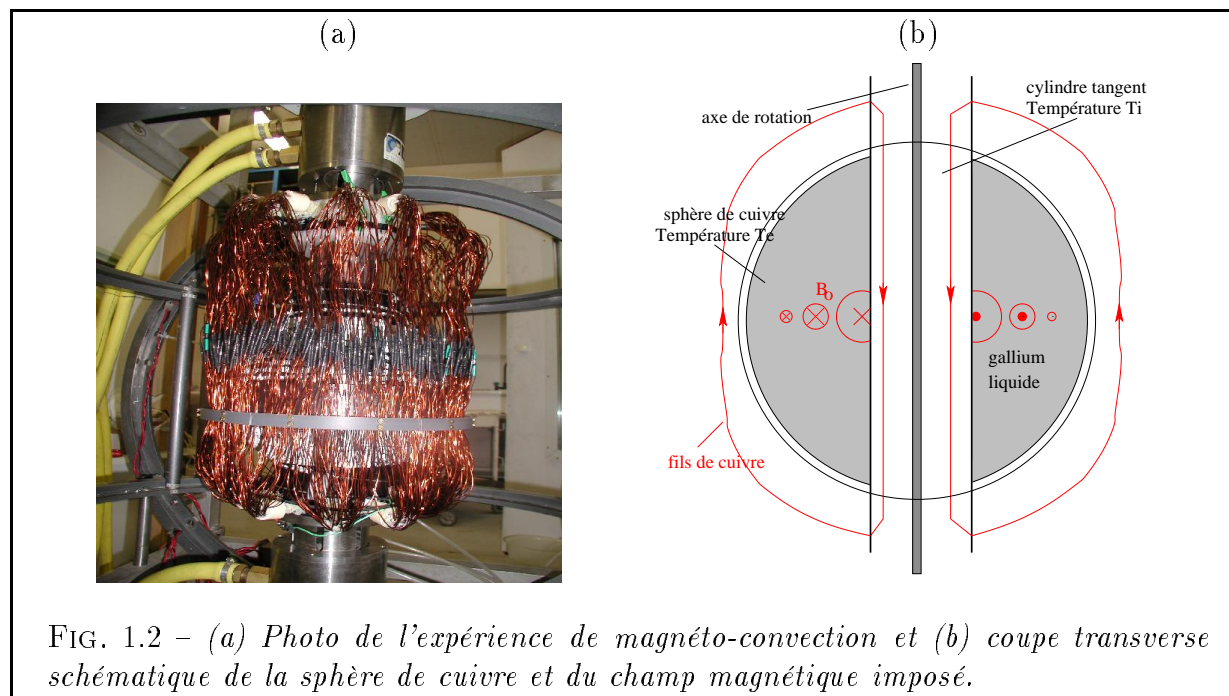


FIG. 1.2 – (a) Photo de l'expérience de magnéto-convection et (b) coupe transverse schématique de la sphère de cuivre et du champ magnétique imposé.

et à l'extérieur du solénoïde la composante azimutale du champ magnétique \mathbf{B}_0 est nulle (la somme des courants électriques vaut 0). Par ailleurs les composantes de \mathbf{B}_0 selon \mathbf{e}_s et \mathbf{e}_z sont nulles partout (par application du théorème d'Ampère sur une surface verticale contenant l'axe de rotation). Dans le volume de fluide on peut donc écrire

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 N I}{2\pi s} \mathbf{e}_\phi \quad (1.9)$$

Le solénoïde est divisé en 5 secteurs, alimentés via les collecteurs électriques tournants par 3 alimentations (30 V, 20 A) ou (40 V, 50 A). L'intensité maximale par fil vaut $I = 14$ A, valeur pour laquelle on atteint des champs magnétiques d'environ $3 \cdot 10^{-2}$ T près du cylindre tangent. Cette borne supérieure nous est imposée par plusieurs facteurs:

1. on risque de faire fondre les fils de cuivre au-delà d'une certaine intensité.
2. on ne peut évacuer plus d'une certaine quantité de chaleur, et 6000 A passent au milieu du système de refroidissement.
3. l'alimentation du bobinage passe par des collecteurs électriques limités à 10 A.
4. on souhaite aussi éviter les fuites d'eau provoquées par la fonte de certaines pièces en plastique.

Les techniques de mesure - vitesses Doppler et thermocouples - sont les mêmes que celles présentées dans le cas sans champ (section II.3.1). Deux bémols tout de même:

1. les alimentations utilisées pour créer le champ magnétique imposé ne réduisent pas le bruit électro-magnétique, et dégradent donc le signal ultrasonore des vitesses;

2. la mesure de température est moins stable en présence de champ, car les fils de cuivre chauffent au passage la sphère et le cylindre tangent. Ceci limite la durée d'une expérience.

Nous avons par ailleurs tenté deux autres types de mesure... sans succès: le champ magnétique induit par l'écoulement à l'extérieur de la sphère à l'aide de sondes magnétiques fixes dans le référentiel du laboratoire, et le potentiel induit à l'aide de sondes intrusives. Ces tentatives sont décrites dans le paragraphe 3.1.

1.2.2 Pourquoi un tel champ?

On peut se demander pourquoi nous avons choisi d'imposer un tel champ magnétique azimutal. Il nous aurait été possible de coller quelque part sur la sphère une pastille aimantée, mais cela présente un faible intérêt géophysique. Par contre n'aurait-il pas été plus facile d'enrouler un solénoïde autour de la sphère, dont l'axe aurait été confondu avec l'axe de rotation? Il était important pour nous que le champ tourne avec la sphère, ce qui impliquait d'embarquer le solénoïde en rotation. Cela aurait placé la sphère en présence d'un champ uniforme, aligné avec l'axe de rotation.

Efficacité du champ imposé

En terme d'interaction avec le champ de vitesse, un tel champ magnétique est moins efficace qu'un champ magnétique azimutal, à cause de la bidimensionalisation des écoulement dans le plan équatorial. Considérons en effet un champ magnétique adimensionné de la forme $\mathbf{B}_0 = \mathbf{e}_z$. Les courants électriques s'écrivent alors à partir de la loi d'Ohm (équation (1.5), partie I)

$$\mathbf{j} = -\nabla V + [u_\phi \mathbf{e}_s - u_s \mathbf{e}_\phi]$$

La force de Lorentz prend alors la forme

$$\mathbf{j} \times \mathbf{e}_z = \left[-\frac{1}{s} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{e}_s + \frac{\partial V}{\partial s} \mathbf{e}_\phi \right] - \mathbf{u}_e$$

On peut alors montrer que cette force va s'exprimer dans l'équation de vorticité sous la forme

$$\mathbf{e}_z \cdot \nabla \times [\mathbf{j} \times \mathbf{e}_z] = \Delta_e V - \zeta_z$$

Compte tenu de la conservation de la charge $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, le potentiel V est alors solution de l'équation

$$\Delta V = \Delta_e V + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \zeta_z$$

si bien que la force de Lorentz apparaît dans l'équation de vorticité sous la forme

$$\mathbf{e}_z \cdot \nabla \times [\mathbf{j} \times \mathbf{e}_z] = -\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

On peut comprendre cela de la façon suivante: dans ce cas précis les mouvements géostrophiques ne cisailent pas le champ imposé, et donc la force de Lorentz provient entièrement des conditions aux limites. Les études numériques 3D linéaires (Sakuraba [2002]) et non-linéaires (Sakuraba and Kono [2000]) de magnéto-convection dans cette configuration en présence de frontières isolantes montrent que l'impact du champ imposé se fait surtout sentir lorsque Λ approche $O(1)$.

Contexte géophysique

On peut aussi voir un autre intérêt à utiliser un champ azimutal. Pour cela rappelons tout d'abord quelques points:

1. A l'image de ce que l'on pourrait reproduire expérimentalement, divisons le champ magnétique entre un champ vertical B_z et un champ azimutal B_ϕ .
2. De son côté la Terre présente un dipole marqué, superposé à ce qui pourrait s'apparenter à la signature de colonnes (convectives?). Elle possède par ailleurs un champ B_ϕ axisymétrique, d'intensité inconnue.
3. Dans une vision QG de la dynamique, les vitesses se decomposent entre le vent zonal $\overline{u_\phi}$ et les vitesses convectives \mathbf{u}_c , toutes invariantes selon z .
4. Comme nous l'avons vu plus haut, des vitesses géostrophiques ne cisailent pas un champ de type B_z (... peu efficace, cf paragraphe précédent). Par ailleurs le vent zonal n'interagit pas avec un champ de type B_ϕ .

Dans ce contexte, voici une question à laquelle nous aurions souhaité répondre: retrouve-t-on la signature des colonnes convectives lorsque l'on impose un champ magnétique axisymétrique? i.e. détecte-t-on une interaction entre \mathbf{u}_c et B_ϕ génératrice de champ magnétique induit poloidal... Nous présentons dans le paragraphe 3.1.3 nos tentatives infructueuses pour déceler un tel champ magnétique induit.

1.2.3 L'effet Joule

Lorsque l'on introduit un champ magnétique, on ajoute une source de chaleur: l'effet Joule $S_J = j^2/\sigma$ par unité de volume. On peut estimer l'ordre de grandeur de ce dernier pour le problème qui nous intéresse. Considérons un tourbillon de vitesse angulaire ω , de hauteur H et de diamètre L , traversé par un champ magnétique \mathbf{B} orthogonal à l'axe du tourbillon (figure 1.3). Cette configuration est semblable à celle étudiée expérimentalement par Brito et al. [1996]. Écrivons le champ magnétique $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_B$ et la vitesse dans le tourbillon

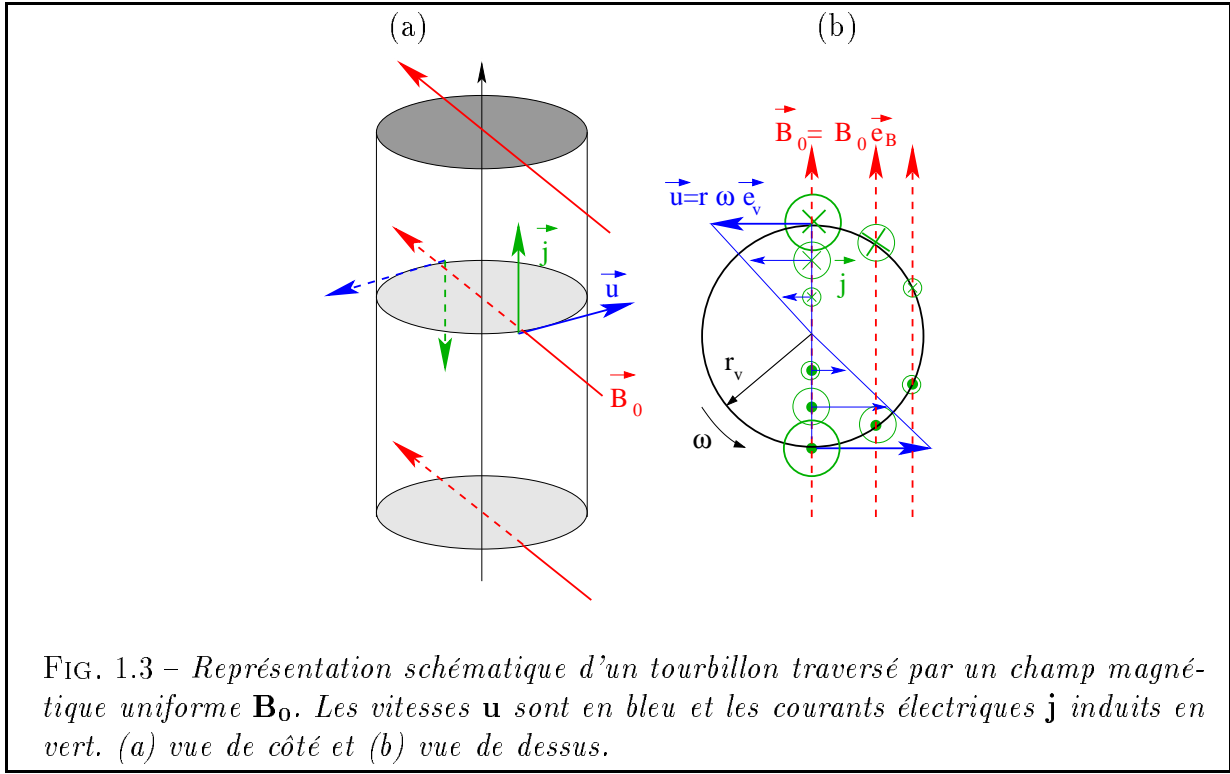


FIG. 1.3 – Représentation schématique d'un tourbillon traversé par un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 . Les vitesses \mathbf{u} sont en bleu et les courants électriques \mathbf{j} induits en vert. (a) vue de côté et (b) vue de dessus.

$\mathbf{u} = r'\omega\mathbf{e}_v$ (ceci n'est qu'un simple modèle de tourbillon, utile ici pour prendre en compte l'anisotropie des courants électriques dans le vortex). La loi d'Ohm (1.5) nous indique alors

$$\mathbf{j}(r', \phi, z) \sim \sigma \mathbf{u} \times \mathbf{B} \sim \sigma B_0 r' \omega \mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_B$$

Si l'on néglige les effets de bord aux extrémités du tourbillon, la chaleur Q_J apportée par effet Joule dans le vortex peut être estimée à

$$Q_J = \frac{1}{\sigma} \int_V |\mathbf{j}|^2 dv \sim \sigma (B_0 \omega)^2 H \int_0^{2\pi} \int_0^{L/2} r'^3 dr' \sin^2 \phi d\phi$$

On note $v = \pi \frac{L^2}{4} H$ le volume du vortex. Alors on peut écrire

$$Q_J \sim \sigma \left(B_0 \omega \frac{L}{2} \right)^2 \frac{v}{4}$$

Considérons pour simplifier que ce vortex est associé à une perturbation de température $\delta T = \delta T_0 \cos\left(\pi \frac{r'}{L}\right)$ (ceci n'est qu'une simple vision du panache associé au vortex, toujours pour calculer un ordre de grandeur). Alors si le vortex est nettement plus haut que large, on peut négliger la diffusion verticale de chaleur, et la chaleur Q_κ diffusée par le tourbillon peut être estimée ainsi par

$$Q_\kappa = k \int_S \nabla T d\mathbf{S} \sim k \frac{4\pi v}{L^2} \delta T_0$$

Le rapport Q_J/Q_κ prend alors la forme suivante:

$$Q_J/Q_\kappa \sim \frac{\sigma (B_0 U L)^2}{16\pi k \delta T_0}$$

Si l'on considère des valeurs typiques pour notre problème - $L \simeq 10^{-2}$ m, $U \simeq \omega L/2 \sim 10^{-2}$ m/s, $\delta T \sim 0.1$ K, $B_0 \sim 10^{-2}$ T, et les caractéristiques physiques du gallium présentées dans le tableau 3.2 (partie II), alors on peut évaluer $Q_J/Q_\kappa \sim 10^{-8}$. La chaleur apportée au vortex par effet Joule est effectivement négligeable devant la chaleur diffusée par le tourbillon.

Chapitre 2

Le seuil d'instabilité

2.1 Etude asymptotique

Nous nous focalisons ici sur l'approche asymptotique du seuil de magnéto-convection dans un métal liquide ($P_m \ll 1$) soumis à un champ magnétique azimuthal. Nous oublions pour un temps la géométrie de ce champ et la variation de la pente des frontières. Nous souhaitons juste présenter une description de premier ordre pour donner une idée du comportement attendu au seuil. On oublie aussi momentanément les conditions aux limites concernant les courants électriques, ce qui nous ramène à un des cas étudiés dans Petry et al. [1997]. Pour simplifier encore, nous négligeons le nombre d'onde radial n face au nombre d'onde azimuthal m (i.e. on écrit le nombre d'onde global $k = (n^2 + m^2)^{1/2} \sim m$). Alors la linéarisation des équations de la chaleur et de la quantité de mouvement mène à la relation de dispersion suivante (Soward [1979]):

$$\frac{E}{P}(-i\omega + m^2 P) + i\frac{\eta_0}{m} - \frac{RE}{(-i\omega + m^2)} + \Lambda = 0 \quad (2.1)$$

qui donne la pulsation et le nombre de Rayleigh en fonction de m :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{m\eta_0}{m^2 E (1 + P^{-1}) + \Lambda} \\ RE = m^4 E + \frac{[m^2 E + \Lambda] \eta_0^2}{[m^2 E (1 + P^{-1}) + \Lambda]^2} + \Lambda m^2 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Nous nous placerons dans un premier temps dans la limite $\Lambda \rightarrow 0$ pour regarder de quelle manière est modifiée l'onde de Rossby thermique évoquée dans la précédente partie sans champ magnétique. Ensuite nous illustrerons les comportements attendus pour de plus grandes valeurs de Λ . L'évolution générale du seuil de convection en fonction de Λ est

schématiquement illustrée sur la figure 2.1.

1. le seuil de magnéto-convection dans la limite $\Lambda \rightarrow 0$:

Considérons tout d'abord le cas où le champ magnétique est faible et négligeons la diffusion visqueuse (dans les métaux liquides $P \ll 1$). L'équation (2.2) nous indique alors que la pulsation est une fonction décroissante de Λ , et dans la limite $\Lambda \rightarrow 0$ le champ magnétique a un effet stabilisant. Nous pouvons effectivement écrire (Fearn [1979])

$$R_c \simeq R_c^0 + \frac{\Lambda}{E} m^2$$

avec R_c^0 le seuil de convection sans champ donné par (1.2)_{II}. Si l'on considère par ailleurs que le nombre d'onde et la pulsation restent proches de l'estimation donnée par (1.2)_{II} dans le cas sans champ, alors on obtient

$$\frac{R_c}{R_c^0} - 1 \simeq \frac{\Lambda}{E^{1/3} P^{2/3}} \quad (2.3)$$

L'augmentation relative du seuil de convection est alors d'autant plus marquée que E et P sont petits.

Tant que les forces d'inertie dominent la force de Lorentz, nous pouvons considérer que l'instabilité qui naît au seuil de convection prend la forme d'une *onde de Rossby thermique modifiée*. L'équation (2.1) nous indique en outre que la limite de cette approche est atteinte lorsque

$$E_t \omega^2 > O(\Lambda m^2)$$

On peut introduire dans cette équation les estimations asymptotiques donnée par (1.2)_{II} dans le cas sans champ. Fearn [1979] a montré que cette onde de Rossby thermique modifiée se propage vers l'est (prograde) et existe tant que

$$\Lambda \sim \left(\left[\frac{1+P}{P} \right] E \right)^{1/3} \quad (2.4)$$

Entre la diffusion de chaleur et celle de quantité de mouvement, c'est en fait la plus forte qui gouverne la limite des modes de Rossby. Dans le cas des métaux liquides qui nous intéresse ici ($P \ll 1$) on obtient alors

$$\Lambda < O(E_t^{1/3})$$

2. le seuil de magnéto-convection pour $O(E_t^{1/3}) < \Lambda < O(1)$:

Pour de plus grandes valeurs de Λ , comme la pulsation devient faible, on peut se

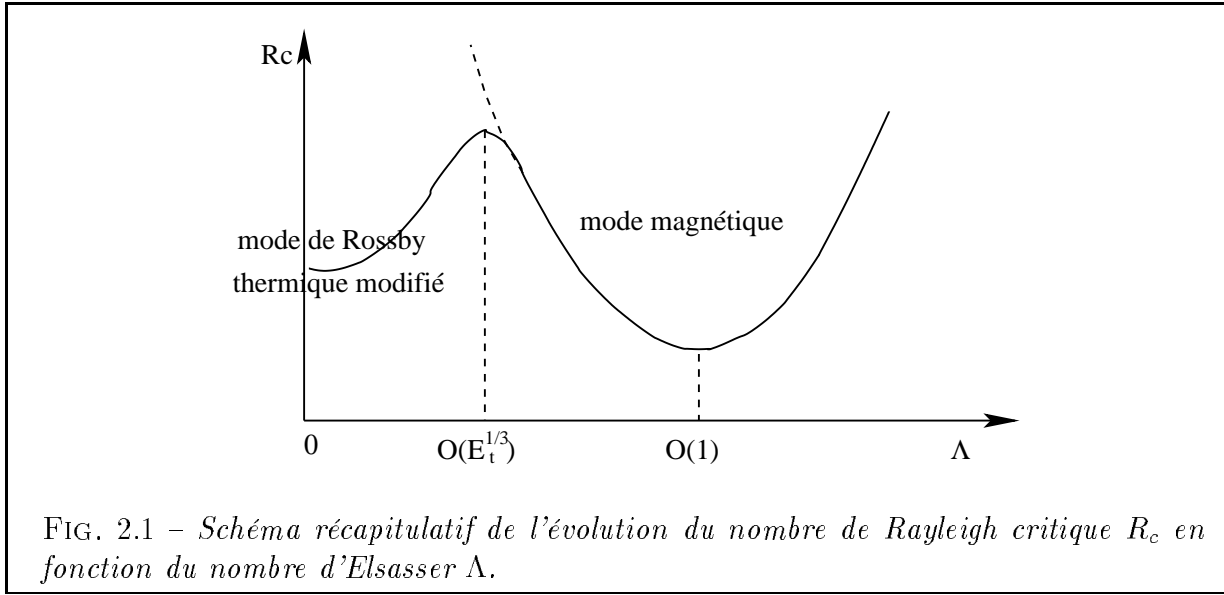


FIG. 2.1 – Schéma récapitulatif de l'évolution du nombre de Rayleigh critique R_c en fonction du nombre d'Elsasser Λ .

mettre à négliger à la fois les processus inertiels et dissipatifs. Il découle alors du système (2.2) l'estimation suivante:

$$\begin{cases} \omega \sim \frac{m\eta_0}{\Lambda} \\ R \sim \frac{\Lambda}{E}m^2 + \frac{\eta_0^2}{E\Lambda} \end{cases} \quad (2.5)$$

A partir de $\Lambda \sim O(E_t^{1/3})$ le nombre de Rayleigh critique se met alors à décroître jusqu'à la limite

$$\Lambda^* \sim \frac{\eta_0}{m}$$

En prenant en compte l'estimation asymptotique sans champ (1.2)_{II}, on peut estimer le rapport entre $R_c(\Lambda^*)$ et R_c^0

$$\frac{R_c(\Lambda^*)}{R_c^0} \sim \frac{2\eta_0}{m} \left(\frac{1+P}{P} \right)^{4/3} E^{1/3} \quad (2.6)$$

Le nombre d'onde critique diminue lorsque Λ augmente, jusqu'à devenir d'ordre unité. Après la limite $\Lambda \sim E_t^{1/3}$, le seuil de convection descendra donc d'autant plus bas que E est petit, et P est grand. Par ailleurs le nombre d'Elsasser Λ^* sera proche de $O(\eta)$ puisque le nombre d'onde critique est alors d'ordre unité. Dans notre cas nous étudions une sphère de rapport d'aspect 4/11 (semblable à celui de la Terre); le nombre Λ^* est alors proche de $O(0.1 - 1)$.

Dans la gamme $O(E_t^{1/3}) < \Lambda < O(1)$ le champ magnétique a donc un effet déstabilisant. L'onde naissant au seuil, appelée *mode magnétique* ou *mode lent*, se propage aussi vers l'est dans le cas des métaux liquides (Fearn [1979]). Pour des nombres d'Elsasser plus grands que $O(1)$, on s'attend à ce que R_c augmente à nouveau mais alors notre approche QG n'a plus sa raison d'être.

2.2 Etude numérique

Nous présentons dans cette section l'étude numérique du seuil de magnéto-convection à l'aide de notre code hybride QG /3D. Une comparaison quantitative avec les tendances asymptotiques n'est pas envisageable ici, il faudrait prendre en compte des conditions aux limites réalistes ou encore la variation de η avec s . Cependant nous pouvons illustrer différents comportements qualitatifs décrits lors de l'étude asymptotique. Nous présentons sur la figure 2.2 l'évolution de $R_c(\Lambda)/R_c^0 - 1$ en fonction de $\Lambda/E_t^{1/3}$ (NB: de la sorte nous prenons en compte le fait que toutes les simulations présentées sur la figure 2.2 ne sont pas effectuées exactement au même nombre d'Ekman). On peut en particulier y remarquer ces quelques points:

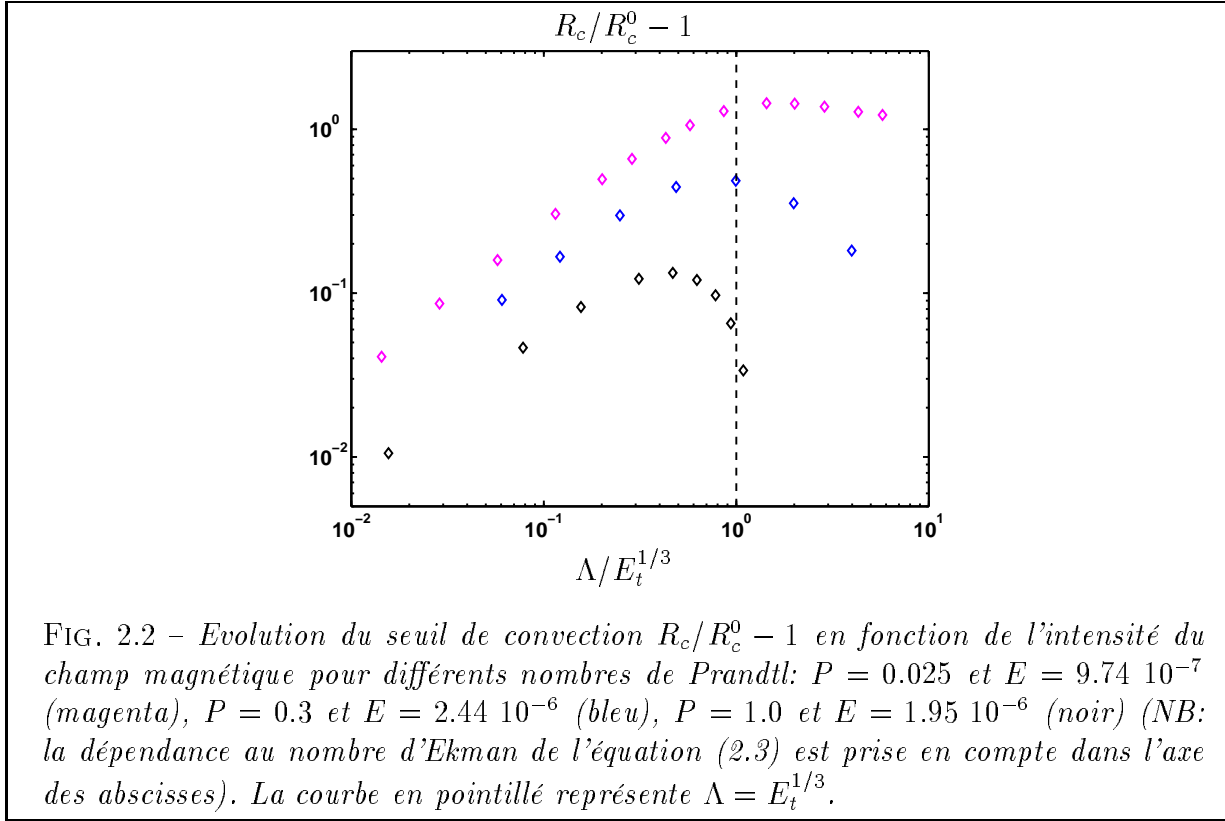
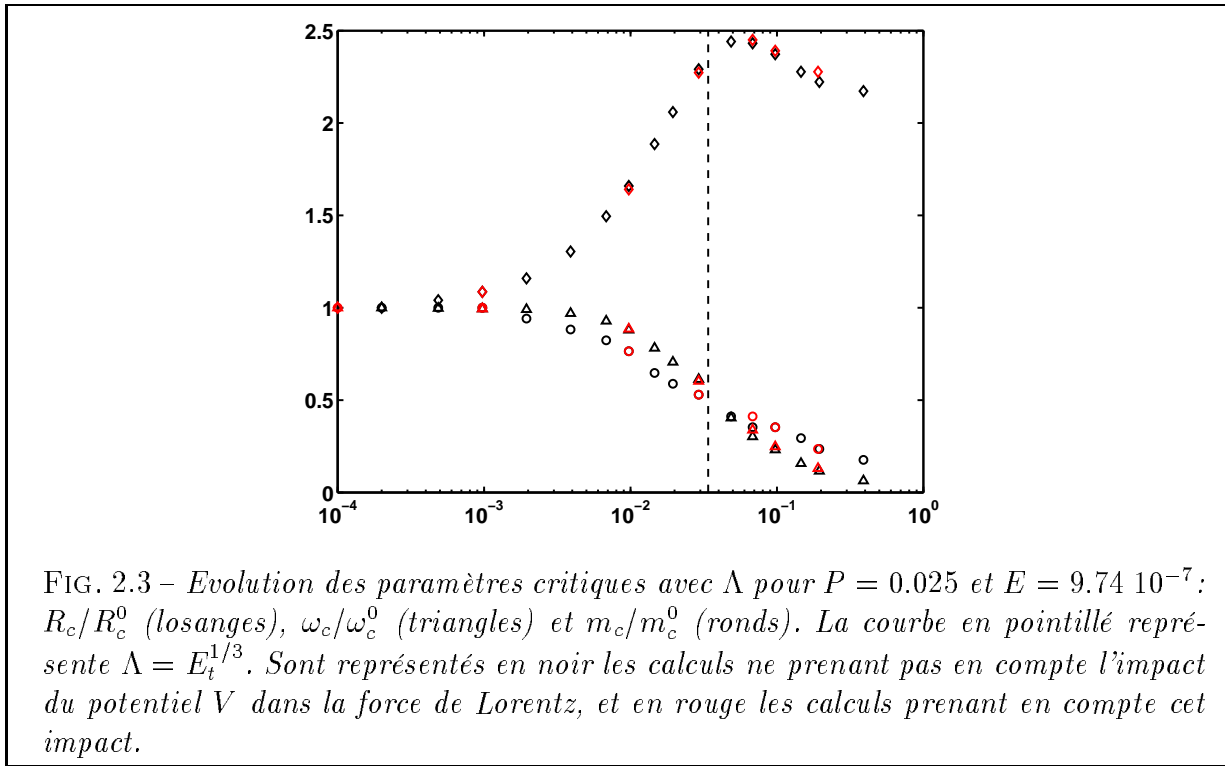


FIG. 2.2 – Evolution du seuil de convection $R_c(\Lambda)/R_c^0 - 1$ en fonction de l'intensité du champ magnétique pour différents nombres de Prandtl: $P = 0.025$ et $E = 9.74 \cdot 10^{-7}$ (magenta), $P = 0.3$ et $E = 2.44 \cdot 10^{-6}$ (bleu), $P = 1.0$ et $E = 1.95 \cdot 10^{-6}$ (noir) (NB: la dépendance au nombre d'Ekman de l'équation (2.3) est prise en compte dans l'axe des abscisses). La courbe en pointillé représente $\Lambda = E_t^{1/3}$.

1. Tout d'abord on observe bien un maximum de $R_c(\Lambda)$ aux alentours de $E_t^{1/3}$ lorsque le nombre de Prandtl est petit. Par ailleurs le fait que ce maximum se décale vers la gauche lorsque le nombre de Prandtl augmente est compatible avec (2.4).
2. Ensuite l'augmentation relative du seuil à partir de $\Lambda = 0$ est d'autant plus grande que P est petit, ce qui est compatible avec l'étude asymptotique du chapitre précédent pour $\Lambda < E_t^{1/3}$ - cf l'équation (2.3).
3. Enfin la diminution du seuil pour $\Lambda > E_t^{1/3}$ est d'autant plus marquée que P est grand, ce qui va dans le même sens que la tendance (2.6) présentée au chapitre

précédent.

Nous allons maintenant illustrer un cas caractéristique de nos expériences en gallium à $P = 0.025$ et $E = 9.74 \cdot 10^{-7}$. On représente sur la figure 2.3 l'évolution des paramètres critiques avec Λ . On notera tout d'abord que l'estimation numérique ne varie pas beaucoup suivant que l'on prend en compte ou non l'impact du potentiel V (i.e. des frontières isolantes) dans l'estimation de la force de Lorentz, tout du moins tant que l'on ne dépasse pas la limite $\Lambda \sim E_t^{1/3}$. En d'autres termes, l'évaluation des paramètres critiques semble peu dépendante des conditions aux limites lorsque naît au seuil une onde de Rossby thermique modifiée. Au delà de $\Lambda \sim O(E_t^{1/3})$ la prise en compte des conditions aux limites devient importante, avec une augmentation du seuil en présence de frontières isolantes. On remarquera ensuite que la fréquence et le nombre d'onde critique diminuent avec Λ .



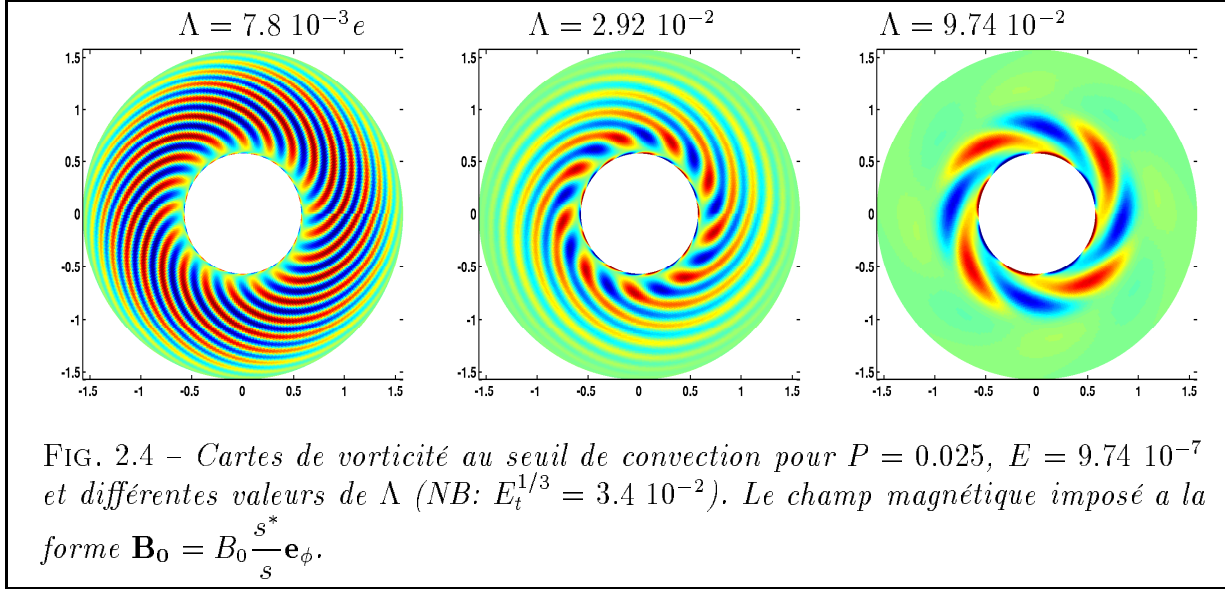
Sur les cartes de vorticité au seuil présentées sur la figure 2.4, on notera que les tourbillons sont de plus en plus allongés selon \mathbf{e}_ϕ à mesure que Λ augmente. On peut qualitativement interpréter cela par l'anisotropie du champ magnétique imposé. Oublions un instant l'effet du potentiel V : on peut alors s'apercevoir, pour un champ magnétique \mathbf{B}_0 azimutal, que la force de Lorentz n'a pas de composante selon \mathbf{e}_ϕ , et qu'elle s'oppose à l'apparition de mouvements selon \mathbf{e}_s :

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 = [\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0] \times \mathbf{B}_0 = -B_0^2 u_s \mathbf{e}_s$$

Les mouvements radiaux sont alors rendus plus difficiles que les mouvements azimuthaux: $\hat{U}_s < \hat{U}_\phi$. Une estimation grossière à partir de la non-divergence horizontale des écoulements QG nous amène alors à

$$\frac{l_s}{l_\phi} \sim \frac{\hat{U}_s}{\hat{U}_\phi} < 1$$

avec l_s et l_ϕ les tailles radiales et azimuthales. Ceci peut expliquer une telle évolution de la forme de tourbillons.



Chapitre 3

Convection développée en présence d'un champ imposé

L'étude de la convection développée en présence de champ magnétique imposé a fait l'objet d'un grand nombre d'études, qui s'intéressent au relâchement de la contrainte de Taylor et à la modification de la géométrie des tourbillons suivant que l'on se place en champ faible ($\Lambda < E_t^{1/3}$) ou en champ fort ($\Lambda \sim 1$). On pourra par exemple consulter Fearn et al. [1994], Olson and Glatzmaier [1995], Cardin and Olson [1995] ou Zhang and Gubbins [2000]. Par contre il existe peu d'expériences de magnéto-convection en rotation dans une cavité présentant des parois penchées.

Nous proposons dans ce chapitre de regarder tout d'abord ce que nous apportent nos mesures expérimentales (fluctuations de température et vitesse) en présence de champ magnétique. Dans la gamme de champ magnétique \mathbf{B}_0 accessible expérimentalement, nous tenterons de dissocier différents impacts, comme ceux liés à l'évolution du seuil de convection et de la taille des structures, en regard des mises à l'échelle développées dans le chapitre 2.3.1. Nous n'avons malheureusement pas pu traverser la limite $\Lambda \sim E_t^{1/3}$.

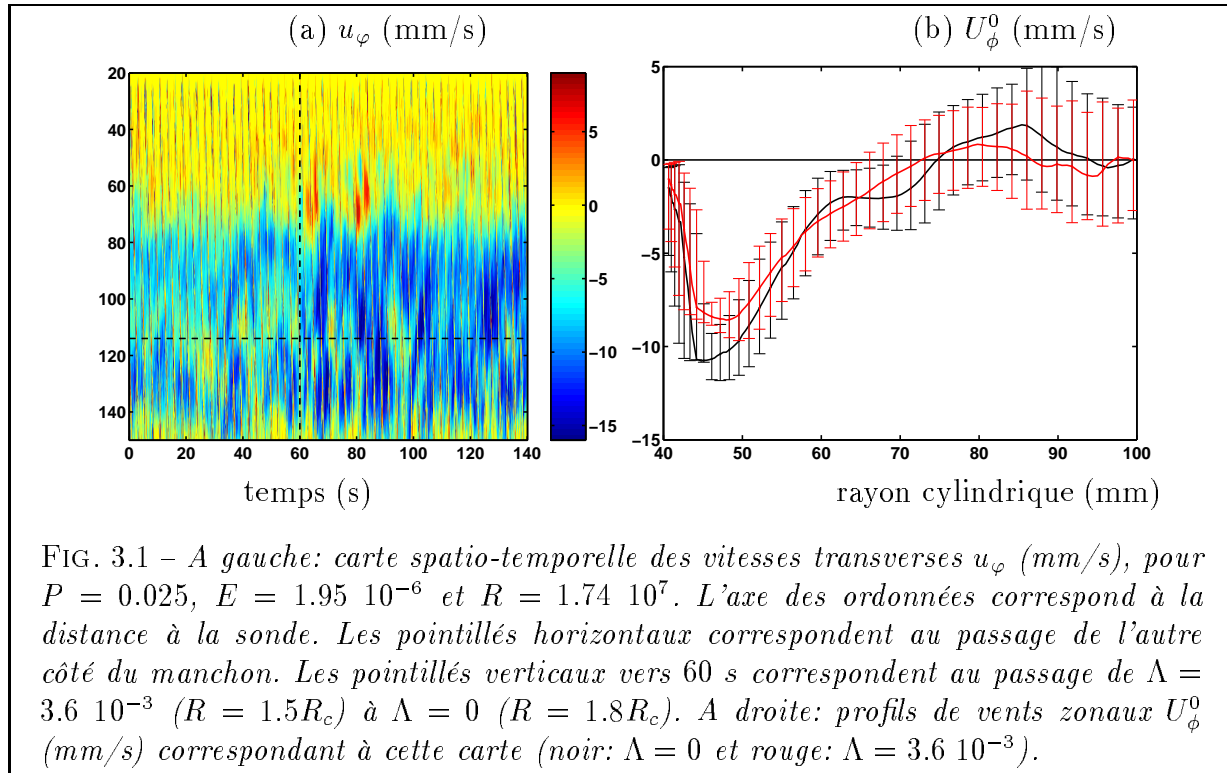
Notre code numérique nous a permis d'étudier la magnéto-convection dans une gamme plus vaste en terme de flux de chaleur et de champ magnétique. Après avoir validé notre code QG/3D dans la limite des champs faibles à l'aide de nos expériences, nous tenterons de faire ressortir quelques caractéristiques dynamiques et thermiques de la magnéto-convection développée à mesure que le mode magnétique prend le dessus sur le mode de Rossby.

3.1 Magnéto-convection expérimentale en champ magnétique faible

Notons une fois de plus que nous ne sommes pas à même de détecter expérimentalement le seuil de convection. Les valeurs critiques utilisées pour l'exploitation des résultats expérimentaux sont donc issues du code hybride QG /3D de magnéto-convection.

3.1.1 Impact du champ magnétique sur les vitesses

Lorsque l'on impose un champ magnétique sur nos écoulements de convection, on observe avec l'instrument Doppler une nette diminution de l'amplitude des vitesses, à la fois convectives et zonales. C'est ce que nous illustrons sur la figure 3.1a, où l'on peut voir une carte spatio-temporelle de vitesse transverse u_φ mesurée lors d'une expérience de magnéto-convection. Lorsque le champ magnétique est brutalement supprimé à $t = 60$ s, la convection gagne en intensité. On retrouve cela plus clairement sur les profils de vents zonaux présentés sur la figure 3.1b.



On pourrait penser à ce stade avoir observé une modification notable des écoulements en présence de champ. Mais attention! Nous avons vu que la convection développée semble

garder longtemps la mémoire du seuil de convection. Or le seuil est modifié assez fortement par la présence du champ magnétique (cf le chapitre 2). Par exemple pour $P = 0.025$ et $E = 9.74 \cdot 10^{-7}$, le nombre de Rayleigh critique $R_c(\Lambda)$ atteint jusqu'à deux fois et demie sa valeur sans champ pour $\Lambda \sim E_t^{1/3}$ (voir la figure 2.3). Ne voit-on pas au travers de nos mesures uniquement l'effet du seuil de convection?

L'ensemble des mesures de vitesse effectuées en gallium, avec et sans champ magnétique, est résumé sur la figure 3.2. On y présente les vitesses radiales et le vent zonal en fonction de l'écart relatif au seuil de convection $R/R_c - 1$. Il semble au premier abord que le paramètre R/R_c résume assez bien l'état de la magnéto-convection quel que soit le champ magnétique, à ceci près qu'il existe peut-être une légère diminution des vitesses radiales à mesure que Λ augmente. La forte diminution des vitesses lorsque l'on impose \mathbf{B}_0 semble donc en grande partie due à l'augmentation du seuil d'instabilité. Pourrait-on y voir autre chose?

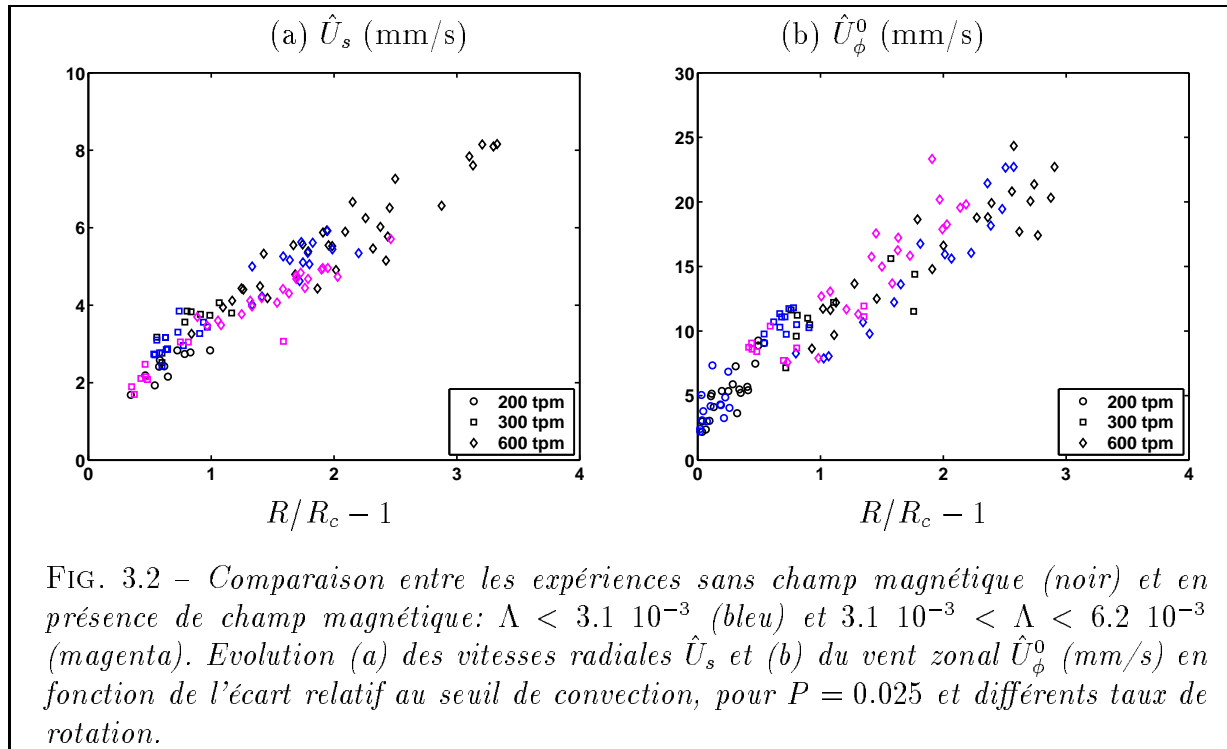


FIG. 3.2 – Comparaison entre les expériences sans champ magnétique (noir) et en présence de champ magnétique: $\Lambda < 3.1 \cdot 10^{-3}$ (bleu) et $3.1 \cdot 10^{-3} < \Lambda < 6.2 \cdot 10^{-3}$ (magenta). Evolution (a) des vitesses radiales \hat{U}_s et (b) du vent zonal \hat{U}_ϕ^0 (mm/s) en fonction de l'écart relatif au seuil de convection, pour $P = 0.025$ et différents taux de rotation.

Le nombre d'onde critique diminue à mesure qu'augmente Λ , et donc on peut s'attendre à une augmentation de la taille des cellules convectives. Dans la gamme explorée expérimentalement, par exemple pour $E = 9.74 \cdot 10^{-7}$, notre code QG / 3D nous indique que le nombre d'onde m_c passe de 17 sans champ magnétique à 14 pour $\Lambda = 6.2 \cdot 10^{-3}$, ce qui correspond à une augmentation d'environ 20% de la taille des tourbillons au seuil. Est-ce compatible avec nos observations? Nous présentons sur la figure 3.3 l'évolution du nombre de Peclet local $Pe_l = \hat{U}_s L / \kappa$ en fonction de l'écart au seuil d'instabilité, pour différents E et Λ . Nous estimons une fois de plus que la taille L est proche de la taille critique

$l_c = 2\pi s_i/m_c$, calculée avec notre code numérique. On remarquera que notre estimation de Pe_l à partir des tailles numériques critiques et des mesures expérimentales de vitesse semble toujours compatible avec la mise à l'échelle élaborée dans le chapitre 2.3.1 consacré à l'étude de la convection sans champ.

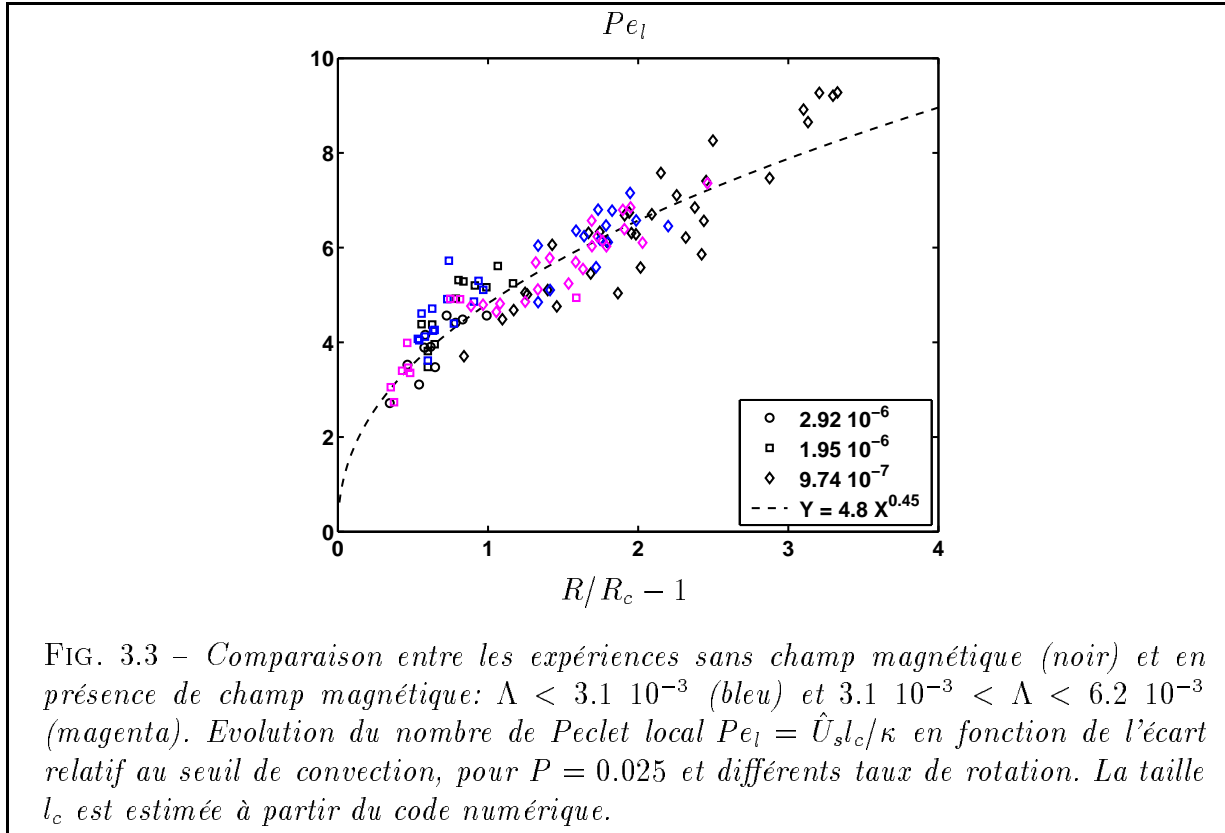


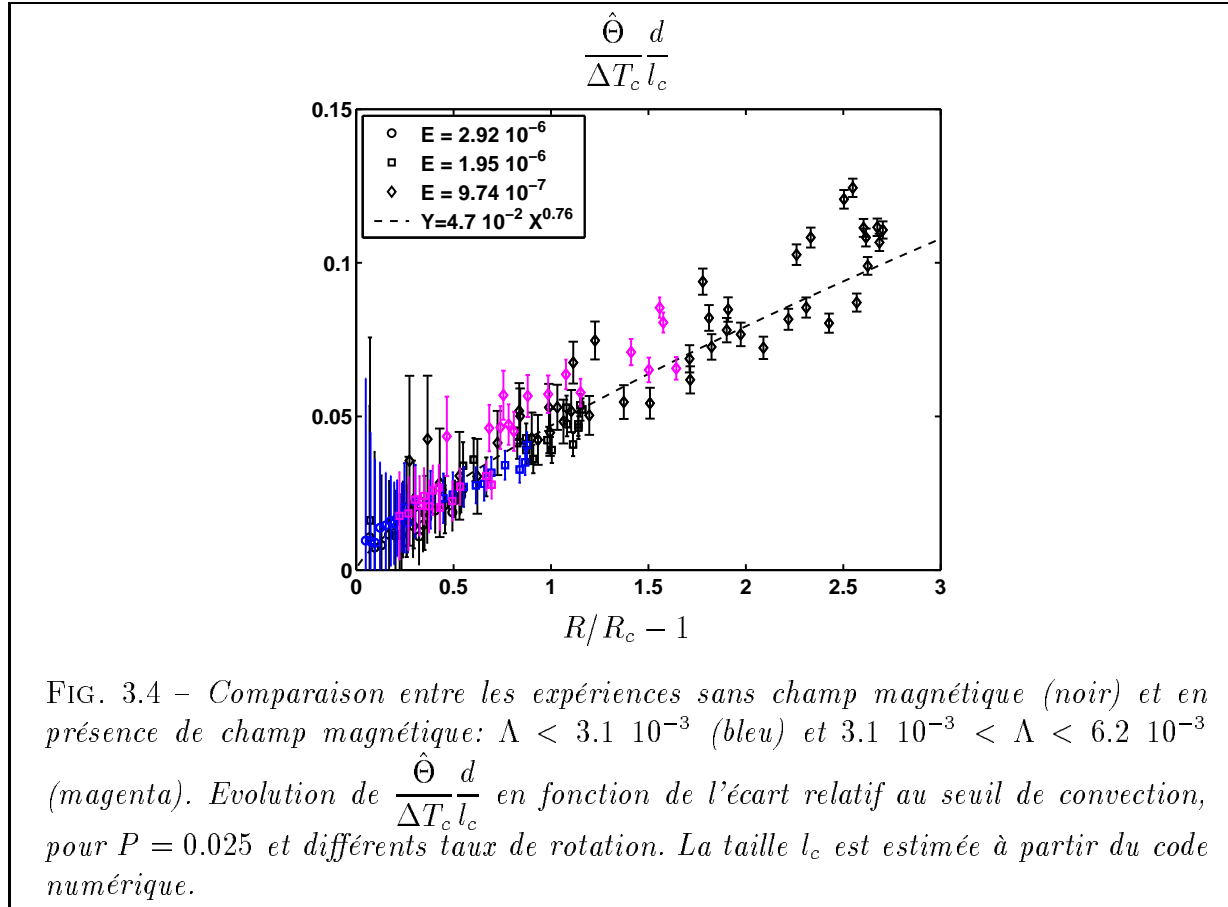
FIG. 3.3 – Comparaison entre les expériences sans champ magnétique (noir) et en présence de champ magnétique: $\Lambda < 3.1 \cdot 10^{-3}$ (bleu) et $3.1 \cdot 10^{-3} < \Lambda < 6.2 \cdot 10^{-3}$ (magenta). Evolution du nombre de Peclet local $Pe_l = \hat{U}_s l_c / \kappa$ en fonction de l'écart relatif au seuil de convection, pour $P = 0.025$ et différents taux de rotation. La taille l_c est estimée à partir du code numérique.

Une fois de plus cela ne constitue pas une preuve, d'autant plus que nous n'avons pas été à même de détecter de modification systématique de la forme des profils de vitesse lors de l'application d'un champ magnétique. En effet nous avons deux voies pour estimer la taille: soit pointer le maximum d'un profil radial U_s , soit compter le nombre N d'oscillations par unité de temps lors d'une mesure radiale puis convertir ce nombre en taille par l'intermédiaire du vent zonal: $L \simeq \hat{U}_\phi^0 / N$. Les cellules convectives étant de l'ordre du centimètre, nous cherchions des variations de la structure des profils de l'ordre de 1 à 2 mm... et aucune des deux méthodes n'a donné quelque chose de robuste.

Mais attention! Lorsque l'on considère la gamme de paramètres explorée en terme de nombre d'Elsasser et de Rayleigh, on s'aperçoit que nos résultats se trouvent dans une gamme réduite en terme de flux de chaleur et de champ magnétique: comme nous l'avons fait remarquer dans la partie précédente, la gamme du rapport R/R_c est étroite. En ce sens il nous est difficile de savoir, uniquement à partir des résultats expérimentaux, si la superposition des mesures avec et sans champ est robuste plus loin du seuil. Par ailleurs les

champs magnétiques les plus intenses, de l'ordre de $3 \cdot 10^{-2}$ T, nous permettent d'atteindre dans les meilleurs des cas $\Lambda \simeq 0.2 E_t^{1/3}$! Nous ne parcourons donc qu'un court chemin dans notre espace à 3 dimensions $(\Omega, \Delta T, B_0)$ - ou (E, R, Λ) .

3.1.2 Impact du champ magnétique sur les perturbations de température



De la même manière que nous avons testé, en présence de champ, la mise à l'échelle du nombre de Peclet local élaborée sans champ, nous pouvons tester la mise à l'échelle des perturbations de température dérivée dans le chapitre 2.3.1. C'est ce que nous présentons sur la figure 3.4. Une fois de plus on notera que cette mise à l'échelle est tout à fait compatible avec nos mesures. Comme c'est le cas pour nos mesures de vitesse, celles de température ne constituent pas une preuve de la mise à l'échelle; mais ce n'est pas tant un problème de résolution qu'un problème d'étendue de la gamme des paramètres. En effet si nous sommes incapables de détecter une variation de 20 % de la taille des cellules - si jamais elle existe - nos mesures de $\hat{\Theta}$ sont résolues à mieux que 10% près dès que l'on s'éloigne un peu du seuil. Remarquons enfin que les nombres d'onde critiques sont assez

petits: $m_c^0 = 12, 14$ et 17 pour $\Omega = 200, 300$ et 600 tpm. Une erreur absolue de 1 dans notre estimation numérique du nombre d'onde critique entraînera donc une erreur relative de -respectivement - 8, 7 et 6% dans notre mise à l'échelle. Ceci est à mettre en parallèle avec la dispersion des points et les barres d'erreur.

3.1.3 La traque infructueuse du champ magnétique induit

Nous avons tenté d'obtenir la trace de l'induction d'un champ magnétique par les écoulements. On peut voir sur la photo de la Figure 1.2a que le solénoïde n'est pas parfait. Le champ imposé est donc légèrement perturbé par rapport au champ théorique. Cependant la taille des imperfections du bobinage est de l'ordre du centimètre, quand le fluide se trouve à plusieurs centimètres des fils de cuivre. Ce n'est donc pas très important du point de vue du fluide. Par contre c'est plus gênant pour des expérimentateurs qui tentent de mesurer le champ magnétique \mathbf{b} induit par les mouvements du liquide. Nous disposions pour cela de sondes magnétiques, de sensibilité 30 nT, que l'on a fixé dans le référentiel du laboratoire. Il n'aurait pas été possible de les faire tourner avec la sphère parce qu'elles auraient saturé en présence du champ imposé. Elles faisaient alors office de "satellite" pour la sphère en rotation.

Le champ induit au sein du fluide diffuse à l'extérieur de la sphère. Si l'on connaît \mathbf{j} en tout point du fluide il est possible de calculer la valeur de \mathbf{b} en tout point M extérieur à la sphère avec la loi de Biot et Savart

$$\mathbf{b}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(P) \times \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^3} dV \quad (3.1)$$

où V est le volume total de fluide, P un point quelconque dans le fluide et $\mathbf{v} = \mathbf{PM}$. On note L la taille d'une structure de champ induit au sein du fluide - proche de la sonde - et δ la distance de la sonde à cette structure. Si l'on considère le courant associé $j \sim \sigma U B_0$, on peut obtenir une estimation grossière du champ que l'on devrait mesurer au point M (en supposant que l'impact le plus fort en M provient des courants électriques les plus proches de la sonde)

$$b_M \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma U B_0 L^3}{\delta^2} \sim \frac{R_m B_0}{4\pi} \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \quad (3.2)$$

On peut difficilement approcher la sonde plus près que $\delta = 4$ cm. En prenant $R_m \sim 10^{-3}$, $L \sim 10^{-2}$ m et $B_0 = 10^{-2}$ T, on obtient un ordre de grandeur de ce que nous pouvons espérer mesurer: $b_M \sim 50$ nT. C'est de l'ordre de la sensibilité des sondes, et dans un cas idéal - sans trace de \mathbf{B}_0 à l'extérieur du solénoïde - cette mesure de champ induit aurait peut-être été possible.

En l'occurrence, nous n'avons malheureusement pas pu extraire ce signal des fuites de \mathbf{B}_0 en dehors du solénoïde. La principale raison vient de la structure pseudo-périodique des

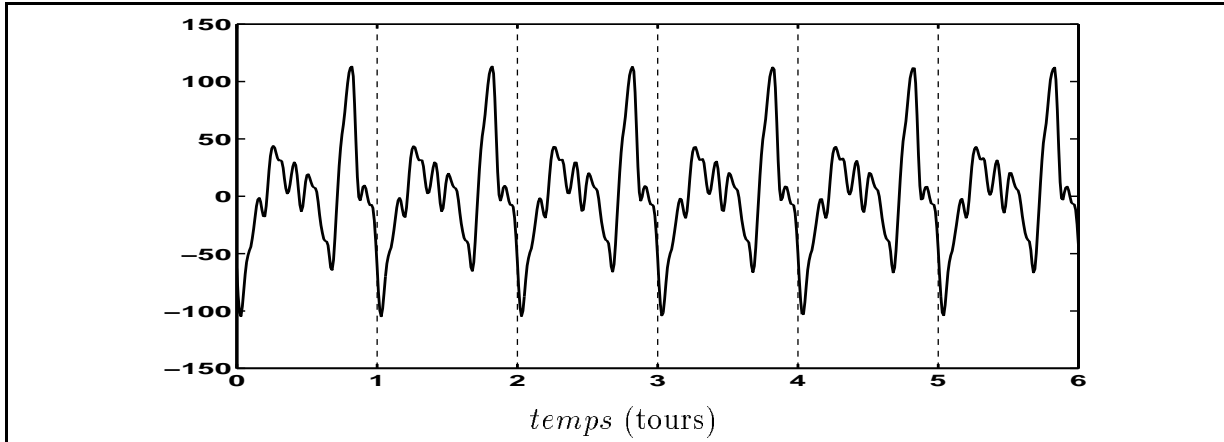


FIG. 3.5 – Tentatives de mesure de champ induit... où l'on ne récolte que le signal périodique dû aux imperfections du solénoïde (en μT).

enregistrements obtenus. On peut considérer que la dynamique des mouvements du fluide est bien plus lente que la rotation: nos mesures de vitesses vérifient bien $\overline{u_\phi} \ll s\Omega$. Alors une structure magnétique associée à un tourbillon doit se retrouver quasiment au même endroit d'un tour à l'autre. Le signal attendu doit donc comporter des pulses de pseudo-période $f_b \simeq \Omega/2\pi$, modulée à plus basse fréquence par la dynamique. Mais on voit aussi défiler les fuites de \mathbf{B}_0 avec une pseudo-fréquence $f_B = \Omega/2\pi$, dont l'amplitude est bien plus grande: de l'ordre de la centaine de μT ... Bien que la trace des fuites de champ imposé soient extrêmement régulière d'un tour à l'autre (voir la figure 3.5), toutes nos tentatives de traitement du signal pour isoler \mathbf{b} ont échoué.

Les sondes de potentiel, utilisées comme thermocouples pour mesurer les fluctuations de température, pouvaient aussi servir de voltmètres locaux pour visualiser les potentiels V créés cette fois par le bouclage des courants électriques près des parois. Au vu des grandeurs de U , L et B_0 précédemment évoquées, on s'attendait à des valeurs $V \sim UB_0L$ de l'ordre de quelques μV , ce qui est la limite de résolution de nos sondes. Ici aussi, nous n'avons rien observé de robuste.

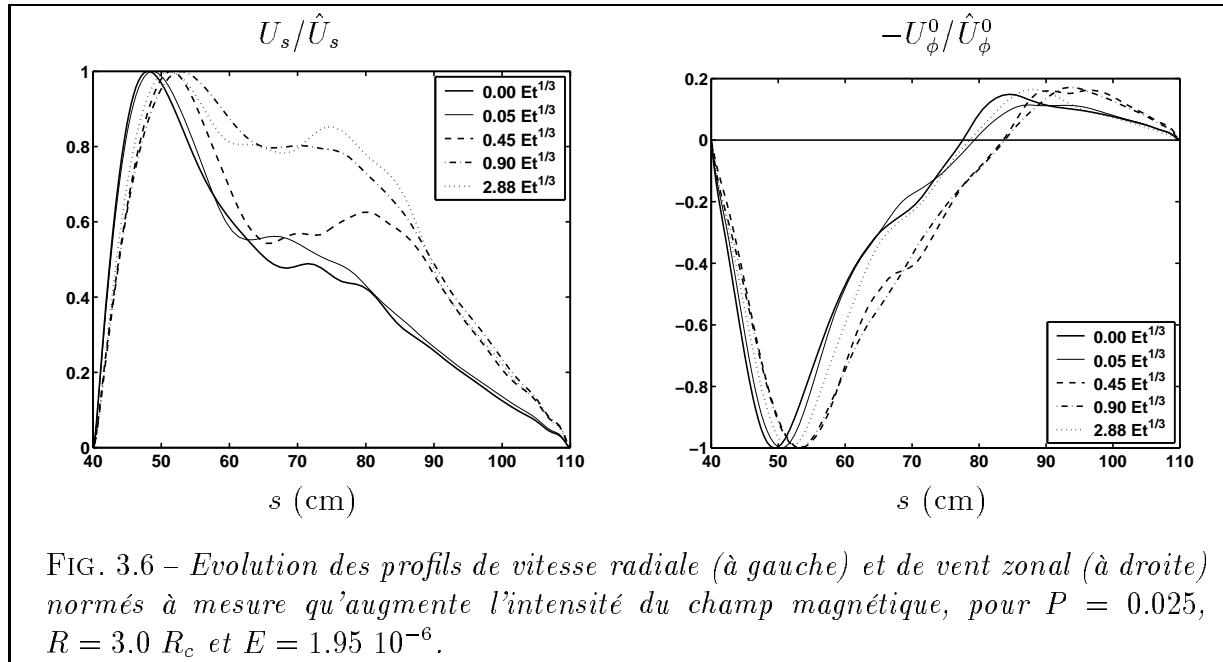
3.2 Magnéto-convection développée: étude numérique

La convection et la magnéto-convection développées en rotation rapide ont ceci en commun qu'elles semblent garder la mémoire du seuil de convection. C'est du moins ce que suggèrent nos mesures expérimentales de vitesse et de fluctuations de température, lorsque l'on reste dans le cas d'un champ faible ($\Lambda < E_t^{1/3}$), où l'on décrit le mode critique comme une onde de Rossby modifiée (cf le chapitre 2). Qu'en est-il lorsque l'on croise la limite entre le mode de Rossby et le mode magnétique?

Nous allons tenter d'apporter quelques éléments de réponse à l'aide de notre code hybride QG/3D. Nous vérifierons tout d'abord si ce code confirme nos expériences en champ faible. Nous tenterons ensuite de caractériser les modifications de la dynamique et de la thermique lorsque le mode magnétique prend le dessus.

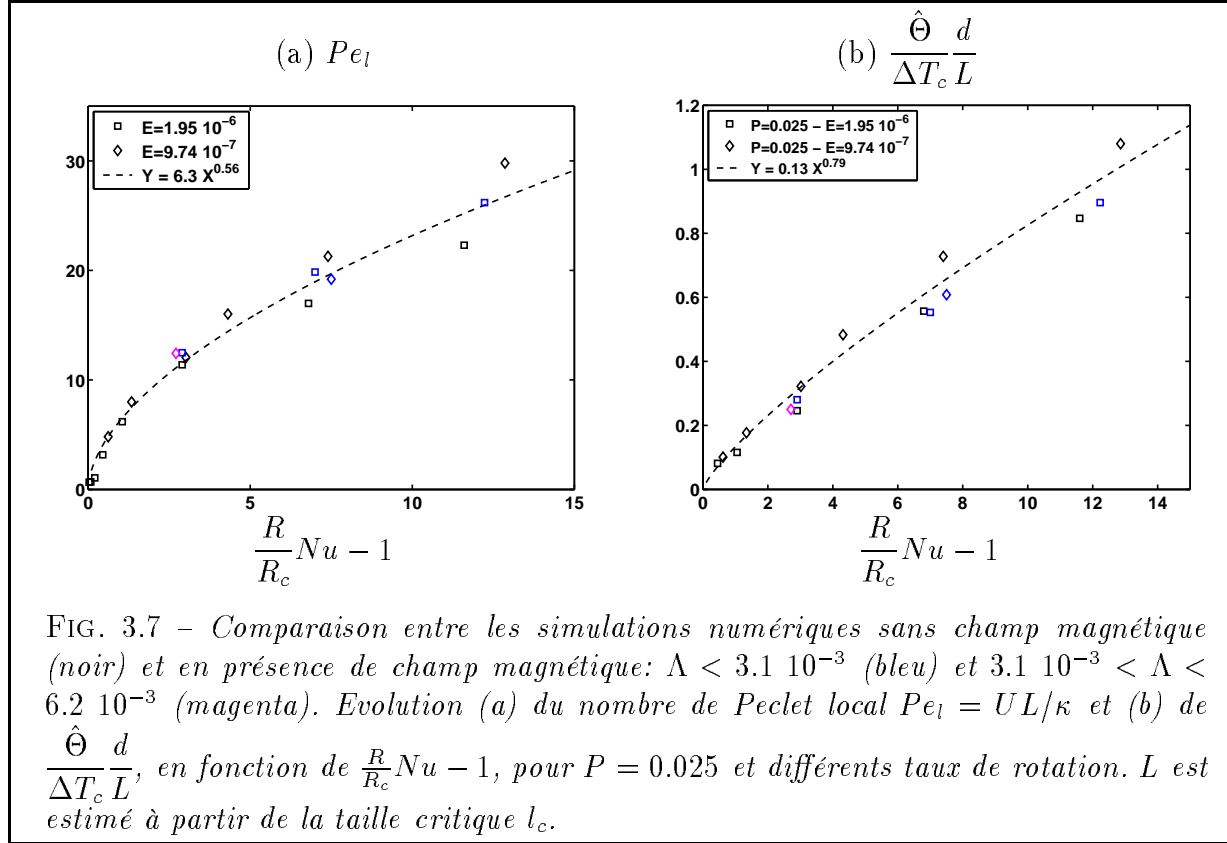
3.2.1 Validation du code numérique en champ faible

Dans ce paragraphe nous nous plaçons dans la limite $\Lambda < E_t^{1/3}$, afin de comparer le comportement de la magnéto-convection issue de notre code hybride avec ce que l'on a pu noter expérimentalement. On peut tout d'abord regarder dans quelle mesure l'allure des profils de vitesse radiale et de vent zonal change en présence de champ. C'est ce que nous présentons sur la figure 3.6. On remarquera tout d'abord que les simulations effectuées dans la gamme expérimentale du nombre d'Elsasser ne présentent qu'une faible modification des profils radiaux et zonaux. Ceci est compatible avec le fait que nous n'ayons pas pu observer d'évolution de la forme des profils de vitesse dans notre expérience.



On peut remarquer que les extrema des profils s'écartent tout de même du manchon à mesure que l'on se rapproche de $\Lambda \sim E_t^{1/3}$: la convection gagne l'extérieur de la sphère à mesure que l'intensité du champ augmente. Ceci pourrait avoir deux origines: soit un grossissement des cellules convectives (qui irait de pair avec la diminution du nombre d'onde critique avec Λ) soit un décalage de la zone convective vers l'extérieur dû au fait que la contrainte magnétique décroisse avec s . Nous reviendrons sur cette question dans le paragraphe suivant.

On peut noter à ce stade qu'un "simple" facteur 2 dans l'intensité du champ magnétique nous a manqué expérimentalement pour atteindre la limite $\Lambda \sim E_t^{1/3}$, et par là même pour observer cette modification notable des profils de vitesse observés sur la figure 3.6. En effet Λ évolue comme B^2 . Cependant ce simple facteur 2 correspond à ... 4 fois plus de chaleur à évacuer! (puisque l'effet Joule évolue comme $I^2 \propto \Lambda$).



Nous avons pu aussi comparer les simulations sans champ et avec champ au regard des mises à l'échelle de la partie 2.3.1. En effet nos expériences suggèrent que les processus thermiques et dynamiques se comportent de manière similaire avec et sans champ, pour peu que l'on prenne soin d'intégrer dans les mises à l'échelle l'évolution avec Λ du seuil de convection R_c et de la taille des tourbillons $L \simeq l_c$. Nous présentons sur les figure 3.7a et b l'évolution du nombre de Peclet local et de $\frac{\hat{\Theta}}{\Delta T_c} \frac{d}{L}$ avec le paramètre $p = \frac{R}{R_c} Nu - 1$, pour différentes intensités du champ magnétique et différents taux de rotation. On remarquera que notre code hybride QG/3D présente un comportement tout à fait compatible avec nos tendances expérimentales pour $\Lambda < E_t^{1/3}$. En ce sens il n'est pas forcément étonnant que nos expériences de convection en présence de champ se comportent de la même manière que nos expériences sans champ - cf les figures 3.3 et 3.4.

3.2.2 Impact sur la dynamique

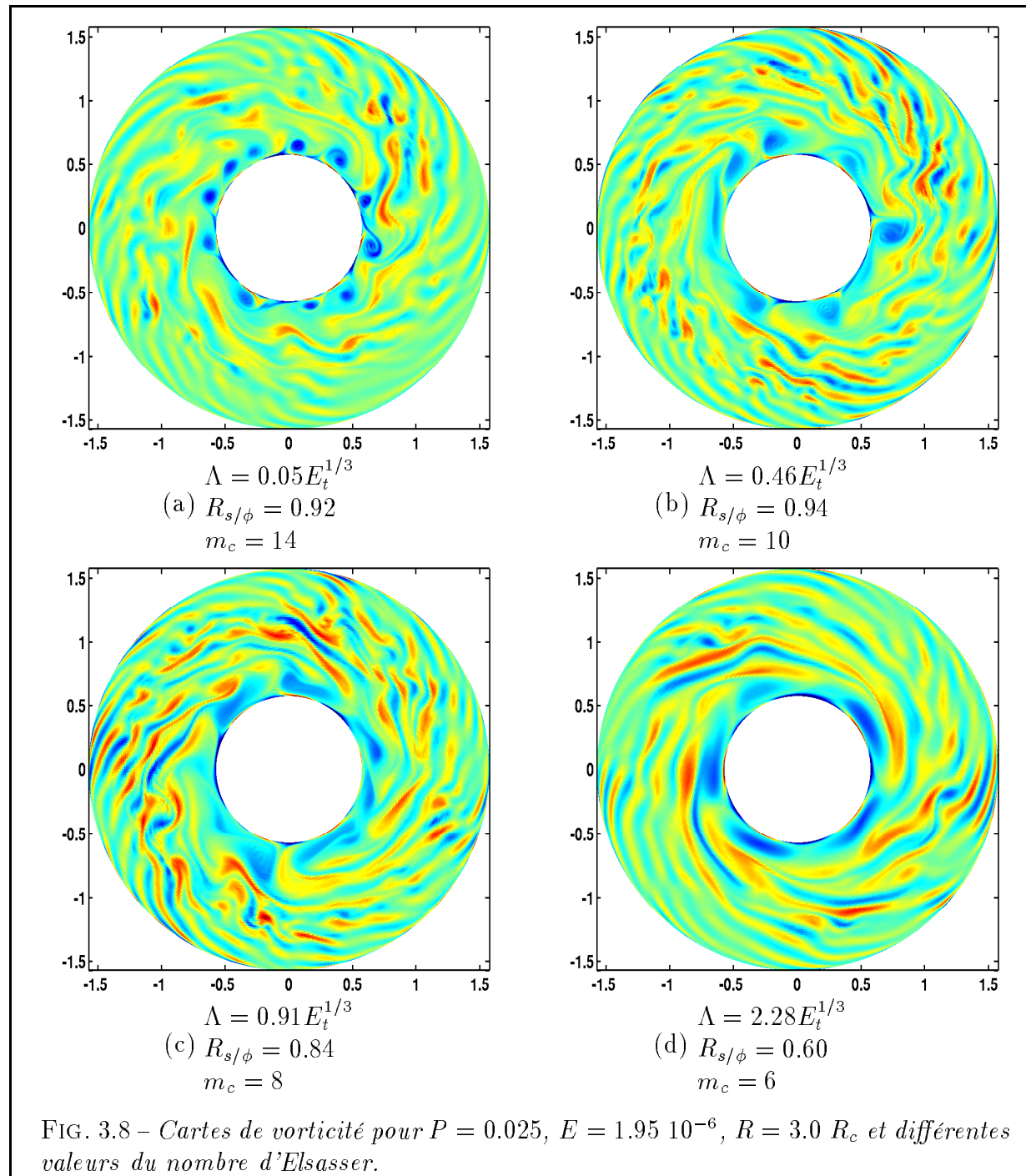
Il semble que la distance relative au seuil de convection explique une grande part de l'impact du champ magnétique. Nous raisonnons dans ce paragraphe pour une valeur donnée de R/R_c , afin d'isoler d'autres impacts du champ magnétique que celui sur le seuil. Nous avons représenté sur la figure 3.8 des cartes de vorticité pour $P = 0.025$, $R = 3.0 R_c$, $E = 1.95 \cdot 10^{-6}$ et différentes valeurs du nombre d'Elsasser. La première chose qui saute aux yeux est la diminution du nombre de tourbillons. On remarquera que cet effet va de pair avec la diminution du nombre d'onde critique. Par ailleurs on peut observer que les tourbillons deviennent de plus en plus allongés dans la direction \mathbf{e}_ϕ à mesure qu'augmente \mathbf{B}_0 . Nous imputons cela à la diminution du rapport

$$R_{s/\phi} = \frac{\hat{U}_s}{\hat{U}_\phi}$$

entre les composantes radiale et azimutales des vitesses convectives. C'est la même explication que celle évoquée dans la section 2.2 à propos de la forme des cellules au seuil de convection: le fait que les lignes de champ magnétique sont orientées selon \mathbf{e}_ϕ rend les mouvements radiaux plus difficiles. Par ailleurs la divergence horizontale du champ de vitesse géostrophique est nulle, ce qui entraîne une diminution relative de la taille radiale par rapport à la taille azimutale: $l_s/l_\phi \simeq R_{s/\phi}$. Il n'est pas nécessairement étonnant que nous retrouvions cet effet à la fois en convection développée et au seuil d'instabilité, puisque la force de Lorentz, comme celle de Coriolis, évolue linéairement avec la vitesse aux faibles R_m .

La géométrie des cellules semble une fois de plus grandement influencée par la forme de l'instabilité qui naît au seuil de convection, c'est du moins ce que l'on peut penser en comparant les tourbillons au seuil (figure 2.4) et ceux en convection développée (figure 3.8). Revenons tout de même sur l'allure des profils de vitesse de la figure 3.6. Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la convection s'étend dans une plus grande partie de la sphère lorsque l'on s'approche de $\Lambda \sim E_t^{1/3}$. Cette colonisation a lieu même si la contrainte de Coriolis (via l'effet β) augmente avec s et rend les mouvements radiaux plus difficiles. On remarquera sur la figure 3.6 que l'extension de la zone convective semble saturer une fois atteinte la limite entre les modes de Rossby et les modes magnétiques. En effet les profils de vitesse radiale, comme ceux de vent zonal, n'évoluent que très peu pour $\Lambda > O(E_t^{1/3})$. Ce n'est donc pas la décroissance de B_0 avec s qui entraînait la convection vers l'extérieur en champ faible.

Le grossissement de la zone convective semble alors d   à la modification de la géométrie des cellules. On peut résumer la situation ainsi: les cellules convectives issues des modes de Rossby modifiés présentent une structure plus ou moins circulaire, et la diminution du nombre d'onde critique avec Λ s'accompagne alors d'un étirement radial de la zone colonisée par la convection. L'extension radiale des cellules issues des modes magnétiques est par contre freinée dans notre cas, à cause de l'anisotropie de \mathbf{B}_0 . Il aurait pu en être autrement pour une géométrie de champ magnétique différente.



3.2.3 Impact sur le flux de chaleur

Evolution du nombre de Nusselt

Les divers points abordés dans les paragraphes précédents s'accompagnent d'une modification de l'organisation du flux de chaleur. On peut en effet estimer le nombre de Nusselt à partir de (2.14). Nous avons vu que Nu est indépendant de s dans notre problème QG. On peut écrire à partir de l'équation (2.14)_{II}

$$(Nu - 1) \frac{dT_s}{ds} = \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial s} - \overline{u_s \hat{\Theta}}$$

En intégrant cette équation entre s_i et s_e on obtient alors

$$Nu - 1 = - \int_{s_i}^{s_e} \overline{u_s \hat{\Theta}} ds$$

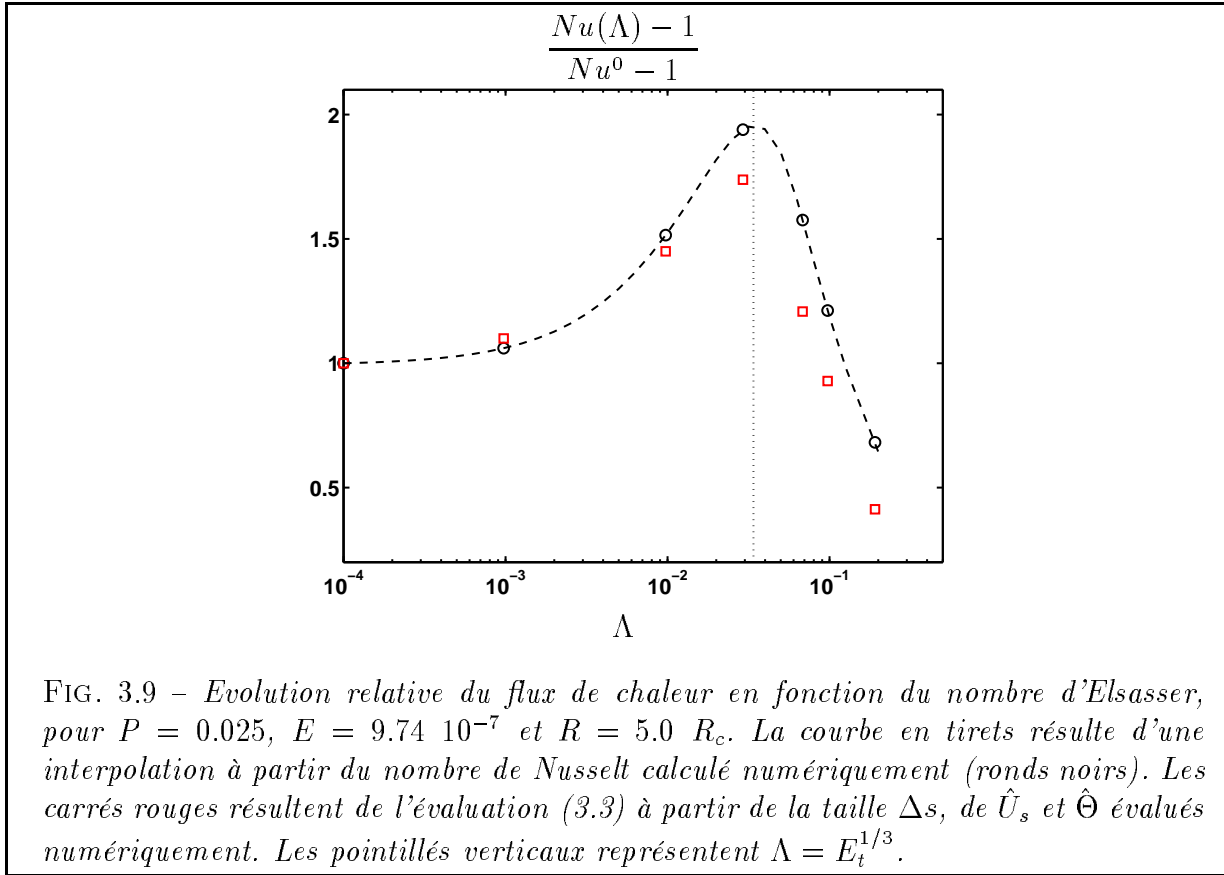
car $\bar{\Theta}(s_i) = \bar{\Theta}(s_e) = 0$. Si l'on note Δs l'extension radiale de la zone convective, pour un fluide bien mélangé on peut grossièrement estimer

$$Nu - 1 \simeq \Delta s \hat{U}_s \hat{\Theta}_c \quad (3.3)$$

Le nombre de Nusselt va donc évoluer en fonction des évolutions conjointes de Δs , $\hat{\Theta}_c$ et \hat{U}_s avec le champ magnétique. C'est ce que nous montrons sur la figure 3.9, où l'on montre l'évolution relative du flux de chaleur avec Λ pour les paramètres P , R/R_c et E fixés. On note une augmentation du flux de chaleur tant que la convection s'organise à partir d'un mode de Rossby, suivi d'une diminution brusque lorsque l'on passe au mode magnétique.

On peut comprendre cette évolution ainsi:

1. pour $\Lambda < E_t^{1/3}$, le nombre de tourbillons diminue avec Λ , et l'extension radiale Δs augmente, puisque l'on est en présence de tourbillons plus ou moins circulaires issus des modes de Rossby modifiés. Cet élargissement de la zone convective entraîne alors une augmentation du nombre de Nusselt. Par là même cette convection plus efficace s'accompagne d'une augmentation de \hat{U}_s et $\hat{\Theta}_c$. En d'autres termes on augmente de cette manière le paramètre $p = \frac{R}{R_c} Nu - 1$ qui gouverne la mise à l'échelle des perturbations de température et des vitesses radiales (cf le chapitre 2.3.1 de la partie II).
2. pour $\Lambda > E_t^{1/3}$, le problème est différent. Comme nous l'avons remarqué plus haut, les cellules issues des modes magnétiques voient leur extension radiale Δs saturer. Ceci s'accompagne d'une diminution du rapport \hat{U}_s/\hat{U}_ϕ : le transport de chaleur dans la direction radiale est alors moins efficace, et donc le nombre de Nusselt chute. Par la même occasion le paramètre p diminue.



Ces raisonnements sont illustrés par les carrés rouges de la figure 3.9, qui représentent l'estimation numérique du produit $\Delta s \hat{U}_s \hat{\Theta}_c$. La taille Δs est ici évaluée comme l'extension radiale à mi-hauteur du profil U_s . L'évolution du flux de chaleur semble bien compatible avec (3.3).

Retour sur les mises à l'échelle

Nous testons sur la figure 3.10 la mise à l'échelle (2.26)_{II}, pour différentes valeurs de E , P et Λ . Le nombre de Peclet local est toujours estimé à partir de la taille critique $l_c = 2\pi s_i / m_c$. On remarquera que cette mise à l'échelle semble toujours donner le bon ordre de grandeur des vitesses convectives, et ce quelle que soit la valeur de $\Lambda / E_t^{1/3}$.

Nous avons vu que la géométrie du champ imposé joue un rôle important dans l'établissement de la magnéto-convection, puisque c'est elle qui forge la géométrie des cellules convectives. Au vu de la description faite dans les paragraphes précédents, on peut se poser la question suivante: quelle taille utiliser pour estimer le nombre de Peclet local? En effet le développement non-linéaire a été conduit en considérant des tourbillons circulaires, ce qui n'est plus le cas en présence d'un champ magnétique anisotrope. Si l'on reprend le

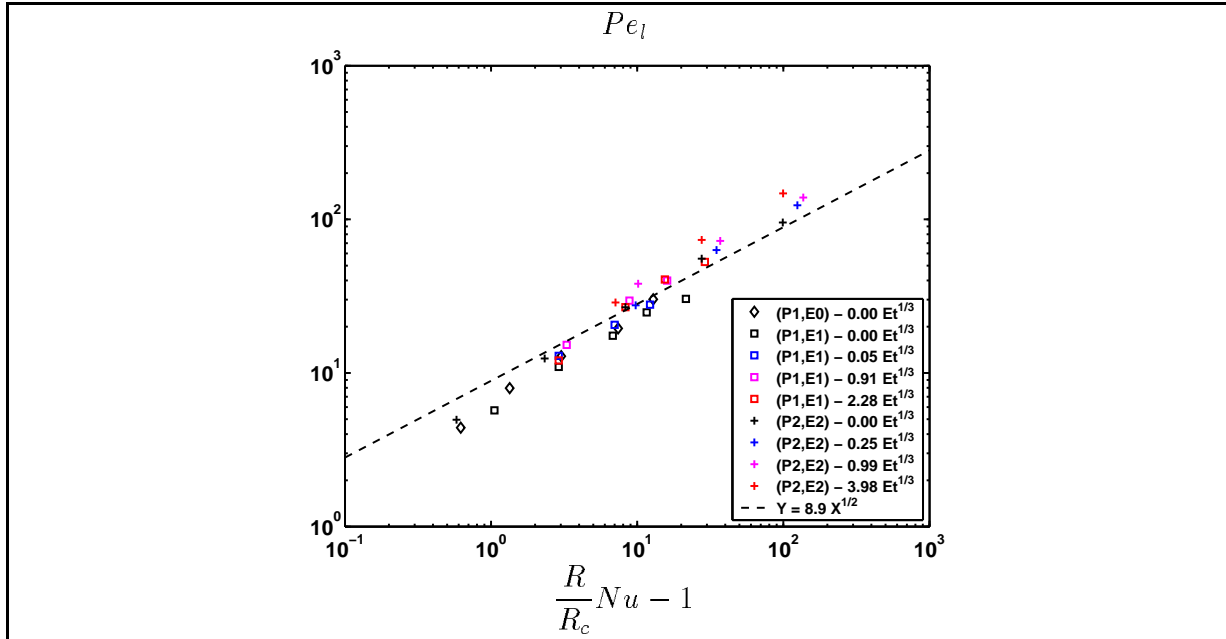


FIG. 3.10 – Evolution du nombre de Peclet local en fonction de $p = R Nu / R_c - 1$ relative au seuil de convection, pour différentes valeurs de E , P et Λ : $E0 = 9.74 \cdot 10^{-7}$, $E1 = 1.95 \cdot 10^{-6}$, $E2 = 2.44 \cdot 10^{-6}$, $P1 = 0.025$, $P2 = 0.3$. Le nombre d'Elsasser est donné relativement à $E_t^{1/3}$: sans champ (noir), $\Lambda < E_t^{1/3}$ (bleu), $\Lambda \sim E_t^{1/3}$ (magenta) et $\Lambda > E_t^{1/3}$ (rouge). La courbe en pointillés représente la mise à l'échelle (2.26)_{II}.

développement à partir du début en considérant que le nombre d'onde radial n est différent du nombre d'onde azimutal m , alors le nombre d'onde global s'écrit $K^2 = m^2 + n^2$ (au lieu de $K^2 = 2m^2$). Dans notre cas les tourbillons deviennent allongés lorsque $\Lambda > E_t^{1/3}$. On devrait alors corriger la taille en conséquence, c'est à dire utiliser la taille $l' = \frac{2\pi\sqrt{2}s_i}{\sqrt{m^2 + n^2}}$.

Dans notre cas cela peut peut-être expliquer la légère augmentation de Pe_l lorsque $\Lambda > E_t^{1/3}$ augmente (lorsque, pour P donné, on passe du noir au rouge sur la figure 3.10), puisqu'en considérant la taille critique on surestime la taille l' . Nous ne sommes pas allés plus loin que cette considération qualitative, car nous estimons cette question trop fine par rapport à ce que l'on pourrait estimer honnêtement.

Conclusions sur la magnéto-convection en rotation rapide

Nous avons présenté ici les résultats d'une étude numérique et expérimentale de la magnéto-convection dans une sphère en rotation rapide. Nous imposons sur les écoulements convectifs un champ magnétique azimutal. L'approche expérimentale repose sur des mesures de vitesses par effet Doppler et de fluctuations de températures à l'aide de thermo-couples, dans du gallium liquide. Cette approche a été couplée avec les résultats d'un modèle numérique hybride entre une description QG des vitesses et un champ magnétique tri-dimensionnel.

Le code numérique nous a tout d'abord permis de déterminer les paramètres critiques du seuil de convection. En accord avec les études asymptotiques, cette étude linéaire QG met en avant deux comportements suivant que $\Lambda < E_t^{1/3}$ (mode de Rossby modifié) ou que $\Lambda > E_t^{1/3}$ (mode magnétique).

En considérant une telle estimation du seuil nos résultats expérimentaux de magnéto-convection développée montrent un comportement tout à fait compatible avec les mises à l'échelles élaborées dans la partie II dans le cadre non magnétique, tant du point de vue des mesures de température que des mesures de vitesse. Dans la gamme de paramètres explorés, il semble que la distance au seuil de convection et le nombre d'onde critique permettent de décrire l'état convectif développé quels que soient les nombres d'Ekman et d'Elsasser.

Cependant notre approche expérimentale s'étend sur une gamme de paramètres limitée. En particulier nous n'avons pas réussi à atteindre le régime décrit à partir du mode magnétique. Nous avons alors poussé l'étude plus loin à l'aide de notre code numérique. Nous vérifions tout d'abord que ce code présente des résultats compatibles avec nos mesures expérimentales obtenues pour de faibles valeurs du champ magnétique.

Pour de plus grandes valeurs du nombre d'Elsasser, nous observons que le nombre de tourbillons est une fois de plus fortement influencé par le nombre d'onde critique. Par ailleurs la géométrie des cellules convectives évolue en fonction du caractère anisotrope du champ magnétique imposé. Cette modification de la géométrie des tourbillons joue un rôle important dans l'organisation du flux de chaleur. Enfin nous vérifions que notre mise à

l'échelle des vitesses convectives, basée sur l'écart au seuil et la taille d'injection, semble convenir même lorsque nous dépassons la limite $\Lambda \sim E_t^{1/3}$.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Chapitre 1

Conclusion Générale

Cette thèse traite de la magnéto-convection développée dans une sphère en rotation rapide, avec une approche à la fois expérimentale et numérique.

Nous avons dérivé dans la première partie, à partir des équations de base, le modèle dit Quasi-Géostrophique. Ce modèle tire parti de la contrainte de Proudman-Taylor, qui rigidifie les écoulements géophysiques le long de l'axe de rotation. Ce passage à une description 2D nous permet d'étudier des écoulements turbulents pour de faibles nombres d'Ekman.

convection sans champ

Ce modèle est ensuite utilisé pour étudier la convection développée. Dans un premier temps nous nous sommes focalisés sur le cas sans champ magnétique. Nous avons simulé des écoulements pour différentes valeurs des nombres d'Ekman et de Prandtl. Ces simulations nous ont amené à dériver des lois d'échelles pour les vitesses convectives et les fluctuations de température, en fonction du flux de chaleur évacué par la convection. Nous avons tout d'abord constaté que la taille des tourbillons reste proche de l'échelle d'injection, et ce même loin du seuil d'instabilité. La convection développée semble alors s'organiser à partir de non-linéarités thermiques, le tenseur de Reynolds promouvant le désordre.

Un tel comportement est assez bien reproduit expérimentalement dans des expériences en gallium, où nos mesures de vitesse (par vélocimétrie ultrasonore) et de fluctuations de température (par effet thermo-électrique) sont compatibles avec les synthétiques QG. De cette manière le code QG est validé pour les faibles nombres de Prandtl.

Nous avons aussi effectué des expériences en eau, qui présentent cette fois des comportements étonnants. Pour des simulations modérément surcritiques (jusqu'à 30 fois au dessus du seuil) nous reproduisons qualitativement des comportements compatibles avec les simulations QG. En particulier nous obtenons des jets multiples de forme comparable. Par contre pour nos expériences les plus loin du seuil nous observons des vents zonaux très intenses, que nous ne savons pas interpréter.

magnéto-convection

Nous sommes partis des mêmes outils pour étudier la magnéto-convection dans une sphère en rotation rapide. Nous imposons sur les écoulements convectifs un champ magnétique azimuthal. Il nous a tout d'abord fallu modifier le code QG pour le coupler avec une description 3D du champ magnétique induit. De la même manière nous avons dû transformer notre expérience.

Le seuil de magnéto-convection, estimé à l'aide du code numérique, semble tout à fait compatible avec les résultats asymptotiques. Par ailleurs la géométrie des tourbillons est modelée par celle du champ imposé. En utilisant cette évaluation du seuil, nos mesures expérimentales de vitesse et de fluctuations de température, effectuées en présence de champ, présentent des comportements compatibles avec les mises à l'échelle établies sans champ imposé. Ces mesures s'échelonnent malheureusement dans une gamme de paramètres (flux de chaleur et champ magnétique) restreinte. Dans cette gamme nous reproduisons par ailleurs avec notre code numérique des comportements très semblables à nos mesures.

Ce code est utilisé ensuite pour étudier la magnéto-convection pour des champs magnétiques plus intenses. La géométrie des tourbillons présents en convection développée semble toujours influencée par la taille d'injection. La géométrie des cellules est, comme au seuil, imposée par la géométrie du champ, ce qui modifie l'organisation du flux de chaleur. Malgré cela les vitesses semblent toujours suivre la mise à l'échelle dérivée sans champ.

Chapitre 2

Perspectives

Nous consacrons ce dernier chapitre à quelques implications et perspectives de ce travail. Si l'on étudie la magnéto-convection, c'est en partie parce qu'elle est plus facile à mettre en place expérimentalement ou numériquement qu'une dynamo. Mais elle s'applique aussi à quelques objets géophysiques, comme certains satellites de Jupiter. En guise d'exemple nous tenterons de donner quelques pistes d'étude concernant les mécanismes qui gouvernent la dynamique à l'intérieur des satellites joviens.

Dans le cas où le champ magnétique n'est plus imposé mais résulte d'un processus de dynamo, les écoulements baignent dans un champ qui n'a pas nécessairement de caractéristique géométrique aussi tranchée que dans notre étude. Pour continuer un peu dans le cadre des modèles Quasi-Géostrophique, nous partirons des résultats de dynamos obtenus par Schaeffer and Cardin [2004a] dans le cadre de la rotation différentielle. Ces auteurs proposent quelques conditions à remplir pour obtenir des dynamos QG; nous tenterons de voir comment ces conditions se couplent avec nos mises à l'échelle... et peuvent nous diriger vers l'obtention de dynamos convectives QG.

Nous tenterons enfin de cibler quels types d'études seraient accessibles expérimentalement, et sous quelles conditions. Dans la limite des matériaux utilisables, il est effectivement intéressant d'essayer de tirer parti des caractéristiques propres aux objets géophysiques. Cela revient à se poser la question des nombres sans dimension que l'on cherche à atteindre, i.e. comment se déplacer dans le vaste espace (Λ , Nu , P , E , R_m , etc.).

2.1 Diverses dynamiques dans les noyaux planétaires

Dans un cadre plus général de magnéto-convection, la géométrie des cellules peut très bien prendre une forme très différente en présence d'un champ imposé d'une autre nature. Une application intéressante serait d'étudier le cas des lunes de Jupiter comme Ganymède, Io,

Europe où Calisto, pour lesquelles la sonde Galileo a rapporté un grand nombre d'observations. Ces satellites baignent dans le champ magnétique de Jupiter \mathbf{B}_J , et la sonde a pu mesurer des perturbations magnétiques importantes à l'approche de ces objets, indiquant que certains sont constitués d'une partie métallique liquide et peuvent créer leur propre champ. Nous avons de bonnes raisons de penser que le champ magnétique de Ganymède (antiparallèle à son axe de rotation et incliné d'environ 10° par rapport à son axe de rotation) provienne d'une dynamo auto-entretenu (Schubert et al. [1997] et Sarson et al. [1997]). Par contre dans le cas de Io, plus proche de sa planète mère, il semble difficile de dissocier entre une dynamo auto-entretenu et un état de magnéto-convection (Sarson et al. [1997] et Kivelson et al. [2001]). Le cas d'Europe est un peu différent. On estime que la présence du champ de Jupiter peut induire des courants électriques dans l'épaisse couche d'eau recouvrant ce satellite.

2.1.1 Champ magnétique sur Io: magnéto-convection, dynamo ou autre?

Dans le référentiel de Io, un observateur voit le champ \mathbf{B}_J (d'amplitude typique $1.8 \cdot 10^{-6} T$ aux environs de Io, Sarson et al. [1997]) évoluer dans le temps et dans l'espace. On peut oublier les fluctuations rapides qui ne peuvent atteindre les profondeurs du noyau liquide (qui proviennent entre autre du fait que Io tourne autour de son axe $\boldsymbol{\Omega}_{Io}$ avec une période d'environ 0.3 jours terrestres, que le champ magnétique de Jupiter tourne avec sa planète en 2.4 jours terrestres, etc.). Sarson et al. [1997] considèrent que la résultante efficace du champ est constante et alignée avec $\boldsymbol{\Omega}_{Io}$. Nous sommes dans ce cas en face de deux possibilités: soit le champ magnétique mesuré résulte d'un processus dynamo, soit il résulte d'un état de magnéto-convection. Nous allons brièvement évoquer les différentes possibilités.

Avant tout, estimons quelques nombres sans dimension. Le nombre d'Ekman est de l'ordre de 10^{-13} . Quel nombre d'Elsasser pouvons-nous construire pour Io? en prenant $\rho \simeq 5 \cdot 10^3 kg/m^3$, $\sigma \simeq 10^6 (\Omega m)^{-1}$ et les valeurs du tableau 1.1 de l'introduction générale, on obtient un nombre d'Elsasser $\Lambda \sim O(5 \cdot 10^{-3})$. A moins que l'on sous-estime fortement le champ magnétique à l'intérieur du noyau (par exemple, un champ azimuthal intense qui ne sortirait pas du noyau), le champ magnétique semble insuffisant pour briser la géostrophie.

Dans l'hypothèse d'un état de magnéto-convection, quel nombre de Reynolds magnétique peut-on imaginer? Le champ magnétique induit dans le noyau de ce satellite est estimé à $B_{Io} \sim 10^{-5} T$. En présence du champ de Jupiter, on peut alors imaginer $R_m \sim B_{Io}/B_J \sim 5$. Un tel nombre semble un peu juste pour allumer une dynamo, et on ne peut donc pas exclure un état de magnéto-convection.

Plaçons nous maintenant dans l'hypothèse d'une dynamo. A moins que l'on sous-estime le champ B_{Io} , il semble peu probable que celle-ci soit à champ fort. Quel mécanisme pourrait engendrer des mouvements suffisamment intenses pour être à l'origine d'une dynamo à

champ faible? La convection thermique n'est peut-être pas le candidat le plus attrayant. En effet il existe sur Io d'importantes marées joviennes. Celles-ci réchauffent le manteau et limitent ainsi le flux de chaleur qui peut s'échapper du noyau liquide (voir le chapitre 1.3 de l'introduction générale). On pourrait effectivement dans ce cas précis pencher vers d'autres moteurs suffisamment puissants pour être à l'origine de mouvements intenses comme la précession, qui a motivé des études récentes comme celles de Noir et al. [2003] ou Lorenzani and Tilgner [2003], ou encore les marées.

Dans un cas comme dans l'autre, une approche QG pourrait apporter des éléments de réponse. Essayer de reproduire des dynamos QG à faible Λ est une piste intéressante, comme nous le verrons dans le paragraphe 2.2.2. Il pourrait alors être intéressant d'étudier par exemple la magnéto-convection QG en présence d'un champ vertical. Dans ce cas il faudrait aussi coder l'équation d'induction $(1.7)_I$ car on ne peut pas négliger le champ induit devant le champ imposé.

2.1.2 Quel état convectif pour le noyau?

Il est tout de même un aspect important de la convection dans les planètes que nous ne prenons pas en compte: le flux de chaleur isentropique Q_{isoS} , associé au profil de température T_{isoS} (cf le paragraphe 1.2.2 de la partie I). Le profil de température n'est isentropique que si le fluide est bien mélangé. Cela ne veut pas dire qu'il est mélangé par convection. Il est important de noter que dans les planètes, le flux de chaleur conduit le long du profil isentropique ne servira pas à produire des mouvements convectifs, il est perdu. Si l'on fait l'hypothèse qu'il y a de la convection dans le noyau liquide, alors il doit exister des couches limites thermiques à la CMB et à l'ICB. Ces couches limites se traduisent par la présence d'un gradient de température

$$\left[\frac{dT}{dr} \right]_{CMB} > \left[\frac{dT_{isoS}}{dr} \right]_{CMB}$$

En terme de flux de chaleur, le reliquat disponible pour la convection s'exprime

$$Q_{conv} = Q_{CMB} - Q_{isoS} = -k \left[\frac{d(T - T_{isoS})}{dr} \right]_{CMB}$$

Il n'y a a priori aucune raison de penser que Q_{CMB} et Q_{isoS} soient identiques. En présence de convection le profil de température ne peut alors suivre l'adiabat qu'en dehors des couches limites thermiques. On fait souvent l'hypothèse que ces flux sont du même ordre de grandeur, mais même cela n'est pas une certitude. Nous ne savons en fait pas grand chose sur Q_{conv} , et ce d'autant plus que Q_{isoS} est mal contraint (entre autres problèmes: nous ne prenons pas en compte les effets de la composition chimique). Dès lors il n'est pas correct de tenter d'estimer les vitesses ou les fluctuations de température dans le noyau à

partir du flux de chaleur à la CMB et d'une loi d'échelle, comme celles présentées dans le chapitre 2 de la partie II.

En plus de cette difficulté, on peut répertorier d'autres limites de ces lois d'échelle. Excepté dans le régime MAC (équilibre entre les forces d'Archimède, de Lorentz et de Coriolis, Starchenko and Jones [2002]), ces lois d'échelle font souvent intervenir les diffusivités du milieu. Or ce sont des grandeurs que nous contraignons très mal, et s'il semble probable qu'elles soient turbulentes, rien ne nous indique quelles valeurs choisir. D'autres questions, comme par exemple la variation du coefficient d'expansion thermique α en fonction de la température, rendent ces estimations encore plus floues. Par ailleurs les lois d'échelle que nous proposons ici nécessitent de connaître le seuil de convection, ce qui n'a plus de sens ici dans un régime dynamo sous-critique (Zhang and Schubert [2000]).

On peut tout de même essayer de prendre le problème à l'envers, et d'évaluer le flux de chaleur que produirait des mouvements convectifs à partir des estimations de vitesses et de fluctuation de température dans le noyau liquide. En effet nous avons vu que le nombre de Nusselt, dans le cadre de nos simulations QG, pouvait être estimé de manière correcte à partir de (3.3)_{III}, et ce quelle que soit l'intensité du champ magnétique et la taille des cellules (paragraphe 3.2.3, partie III). En redimensionnant les grandeurs, l'équation (3.3)_{III} s'écrit

$$(Nu - 1)k \frac{\Delta T}{d} = \rho C_p U \Theta \frac{\Delta s}{d}$$

Le membre de gauche est en fait une estimation du flux de chaleur Q_{conv} , puisque ΔT est ici une différence de température potentielle. Il nous est possible d'avoir des estimations pour l'ordre de grandeur des vitesses à la CMB à partir de l'inversion des données magnétiques ($U \sim 10^{-4} \text{ m/s}$, Hulot et al. [1990]). Si l'on considère de plus que la convection occupe tout le noyau, alors $\Delta s \sim d$. L'estimation des fluctuations de température est plus délicate. On peut tout au plus considérer que la force d'Archimède est du même ordre que la force de Coriolis, ce qui donne une borne supérieure

$$\Theta < \frac{2\Omega U}{\alpha g}$$

En prenant $g \sim 10$ on obtient alors $\Theta < 10^{-4} \text{ K}$, et alors $Q_{conv} < 100 \text{ mW/m}^2$. Or le flux total évacué à la CMB est de l'ordre de $Q_{CMB} \simeq 5 - 10 \text{ TW}$ (Labrosse et al. [1997] et Roberts et al. [2003]), soit environ 50 mW/m^2 . C'est à dire qu'il y a de la place pour des couches limites thermiques marquées et un état convectif très développé. Attention, tous ces chiffres sont remplis d'incertitude. Il est tout de même intéressant de remarquer que l'hypothèse selon laquelle le flux convectif serait plus faible que le flux isentropique est loin d'être évidente.

2.2 Quel avenir pour les modèles QG?

2.2.1 Distribution du flux de chaleur à la surface du noyau

En lien direct avec ce que nous venons d'évoquer, nous pensons qu'il serait intéressant d'étudier la distribution du flux de chaleur à la CMB à l'aide de modèles QG. Nous avons évoqué dans la section 2.2 (partie I) un des manques de notre modèle QG tel qu'il est écrit actuellement: la description 3D du champ de température. Dans notre étude le flux de chaleur n'a pas de composante verticale. Comme nous l'avons souligné dans la partie 3.1 (partie II), c'est une des limites à la comparaison directe du modèle avec nos expériences.

Or sous certaines précautions (en particulier la prise en compte du vent thermique) il est possible de coupler notre description QG des vitesses avec une description 3D du champ de température. Si jamais une planète présente des écoulements rigidifiés selon la verticale, cela doit sans doute avoir des répercussions sur la distribution de flux de chaleur avec la latitude. Si la variation du flux avec la latitude est importante, cela peut peut-être avoir aussi des répercussions sur le manteau. Cette étude pourrait par ailleurs être menée en parallèle avec une étude expérimentale.

Mais on pourrait aussi prendre le problème à l'envers. C'est à dire étant donné un flux de chaleur imposé à la surface (on n'impose plus la température mais son gradient) on pourrait ainsi regarder comment s'établit la convection développée. L'intérêt de voir le problème sous cet angle est qu'il nous rapproche d'une planète pour laquelle le flux à la CMB est imposé par le manteau. Cette question a déjà abordée en 3D pour la magnéto-convection (Olson and Glatzmaier [1996]) et la dynamo (cf Glatzmaier et al. [1999]). Avec une approche QG nous pourrions atteindre des nombres d'Ekman plus petits et des écoulements plus turbulents.

2.2.2 Vers l'obtention de dynamos convectives QG

Le travail de thèse de Nathanaël Schaeffer avec Philippe Cardin (voir Schaeffer and Cardin [2004a]) montre aujourd'hui des dynamos cinématiques QG en géométrie sphérique dans le cas d'une rotation différentielle de la graine (instabilités de cisaillement). NB: l'équation d'induction est codée en 3D. Ces dynamos prennent la forme soit de quadripôles soit de dipôles (plus difficilement). Ces auteurs définissent deux nombres de Reynolds magnétiques: $R_m^\omega = P_m \hat{U}_\phi^0 / P$ basé sur les mouvements axisymétriques, et $R_m^\alpha = P_m \hat{U}_z / P$ basé sur les vitesses verticales, à partir de quoi ils définissent le nombre dynamo

$$Dy = \sqrt{R_m^\omega R_m^\alpha}$$

Ils montrent qu'il leur faut dépasser un nombre dynamo critique Dy^c compris entre 500 et 1000, à peu près indépendant du nombre de Prandtl magnétique et du forçage, pour

produire des dynamos. La présence du cisaillement zonal semble prépondérante. Or nous obtenons en convection développée des vents zonaux rétrogrades parfois intenses (à faible P), ce qui laisse penser qu'il est peut-être envisageable de produire des dynamos dipolaires convectives avec un code QG.

Compte tenu des mises à l'échelle présentées dans la partie II, nous allons estimer dans ce paragraphe pour quelle gamme de paramètres nous pouvons espérer observer des dynamos cinématiques QG convectives. Notons ici que l'évaluation des vitesses verticales peut s'effectuer soit à partir du pompage d'Ekman, soit à partir de l'effet β . Il n'est pas évident que ces deux mécanismes jouent un rôle similaire dans l'établissement des dynamos QG, puisque le premier est en phase avec la vorticité quand le second est en phase avec les vitesses radiales. Il semble néanmoins que pour les régimes turbulents qu'ils obtiennent, on puisse évaluer le nombre R_m^α à partir de l'effet β (ceci malgré la recherche infructueuse de dynamos QG sans pompage d'Ekman par Philippe Cardin et Julien Aubert). Dans ce cas on peut estimer $\hat{U}_z \sim \eta U_c$, et le nombre Dynamo s'écrit

$$Dy \sim \frac{P_m}{P} \sqrt{\eta \hat{U}_\phi^0 \hat{U}_s}$$

Par ailleurs on peut estimer à partir de la mise à l'échelle (2.29) (chapitre 2.3.2, partie II):

$$\hat{U}_\phi^0 \simeq 2.5 \frac{E^{1/2}}{LP} \left[\frac{Pe_l}{L} \right]^{1.3}$$

Si l'on reprend alors la mise à l'échelle du nombre de Peclet local (  quation (2.26) partie II, censée être valable à faible P en convection suffisamment développée) on arrive à

$$Dy \sim 20 \eta^{1/2} \frac{P_m E^{1/4}}{P^{3/2}} L^{-1.65} \left[\frac{R}{R_c} Nu - 1 \right]^{1.15}$$

On s'aperçoit ici que le nombre Dy^c est d'autant plus facile à atteindre que P_m est grand (c'est à dire qu'il ne faut pas trop diffuser le champ magnétique). La dépendance aux nombres d'Ekman de de Prandtl est plus subtile, car elle a des répercussions sur la taille des cellules convectives. Par ailleurs la taille des cellules varie énormément en présence de champ magnétique, ce qui veut dire qu'un calcul de dynamo cinématique (sans force de Lorentz) donnera des structures nécessairement différentes d'un calcul de dynamo saturée.

Pour simplifier un peu notre vision des choses, plaçons nous tout de suite dans le cas physique des dynamos saturées. Notons tout de suite qu'une dynamo QG n'a de sens que si le nombre d'Elsasser est petit. C'est dans ce cadre que nous nous plaçons. Si l'on est dans le cas où $\Lambda > E_t^{1/3}$, on peut alors considérer que le mode dominant se rapproche d'un nombre de l'ordre de 1 à 10 (cf le chapitre 2, partie III). On consid  rera alors que la taille des cellules est une fraction de la taille d , disons de manière indicative $L \simeq d/3$. Si l'on considère maintenant la pente en s_i ($\eta \simeq 0.4$), on arrive à

$$Dy \sim 50 \frac{P_m E^{1/4}}{P^{3/2}} \left[\frac{R}{R_c} Nu - 1 \right]^{1.15}$$

Dans ce cadre nous avons plutôt intérêt à choisir de faibles P et des nombres d'Ekman pas trop petits (mais suffisamment pour se placer dans le cadre de modèles QG). Si l'on applique maintenant la condition $Dy = Dy^c \simeq 500$ on obtient

$$\left[\frac{R}{R_c} Nu - 1 \right]^{1.15} \sim 10 P^{3/2} E^{-1/4} P_m^{-1}$$

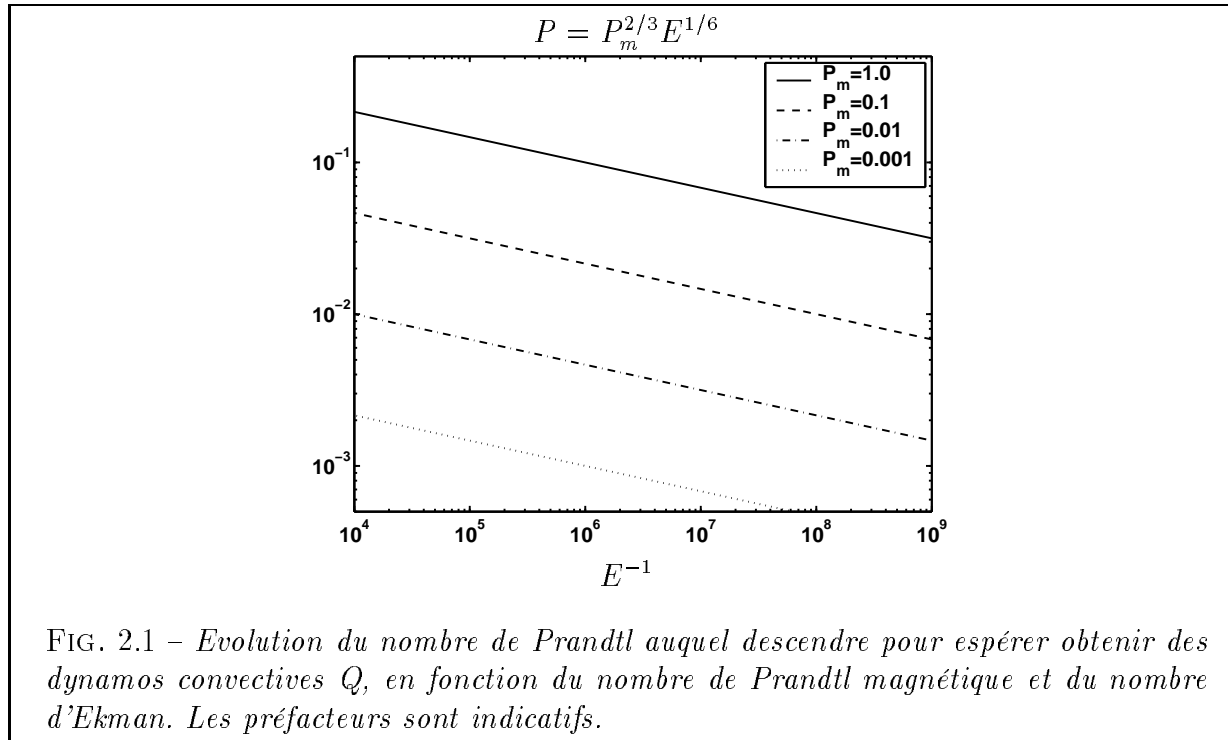
Les simulations seront d'autant plus difficiles à mener que l'on sera loin du seuil, et ce d'autant plus que le nombre de Prandtl sera faible. Pour rester dans une limite raisonnable, considérons que l'on est quelques fois sur-critiques, i.e. $\frac{R}{R_c} Nu - 1$ de l'ordre de 10. Alors il faudra remplir la condition

$$P^{3/2} E^{-1/4} P_m^{-1} \sim O(1)$$

C'est ce que nous résumons sur la figure 2.1, où l'on représente

$$P = E^{1/6} P_m^{2/3}$$

Bien évidemment le préfacteur de cette tendance est indicatif, et ce d'autant plus que le



nombre dynamo critique peut augmenter lorsque l'on introduit la saturation. Cependant il est intéressant de remarquer que ces paramètres ne paraissent pas hors de portée. De plus cela serait peut-être le moyen de produire des dynamos à faible P_m . Ceci présente le

double avantage de nous rapprocher des paramètres physique des métaux liquides, et de pouvoir coder l'équation d'induction sur une grille 3D plus large.

On peut aussi comprendre la figure 2.1 différemment. Si on se place dans le cas du sodium ($P = 10^{-2}$, $P_m = 8 \cdot 10^{-6}$), alors il n'est pas possible d'obtenir de dynamo QG en restant proche du seuil de convection puisque cela nous amène vers les grands nombres d'Ekman (vers la gauche). Cela veut dire qu'il faut alors augmenter le forçage pour espérer voir une dynamo QG expérimentale! Le raisonnement est identique pour une planète, sauf qu'il faut être encore plus loin du seuil au vu des faibles nombres d'Ekman.

2.3 Magnéto-convection expérimentale: perspectives

On se rend compte une fois de plus que les dynamos convectives expérimentales sont hors de portée. Mais ce n'est pas pour autant que les expériences de magnéto-convection en rotation ne peuvent rien nous apporter de plus. Quelques points nous semblent importants à explorer, et ne sont pas hors de portée. Tout d'abord nous ne sommes pas parvenus à atteindre le régime de convection développée pour $\Lambda > E_t^{1/3}$, qui peut présenter des surprises (nos résultats numériques dans cette gamme de paramètres ne sont pas confirmés par des expériences). Dans ce cadre il serait aussi intéressant de mesurer l'évolution du flux de chaleur et de sa distribution en latitude à mesure qu'augmente le champ magnétique. Comme nous l'avons vu c'est un point clef pour déterminer si oui ou non la dynamique convective implique des variations spatiales importantes du flux de chaleur sur la sphère externe. D'un point de vue expérimental, il faut vérifier les conditions suivantes:

1. pouvoir atteindre $\Lambda > E_t^{1/3}$, ce qui s'écrit en fonction des paramètres physiques

$$\frac{B^3 d}{\Omega} > A = \kappa^{1/2} \left[\frac{\rho}{\sigma} \right]^{3/2}$$

où A ne dépend que des caractéristiques physiques du matériau. De ce point de vue le sodium présente le double avantage sur le gallium d'être environ 6 fois moins lourd et 3 fois meilleur conducteur. Par contre il diffuse environ 5 fois plus la chaleur... La limite à dépasser, pour B , Ω et d fixé, reste tout de même environ 30 fois plus petite en sodium qu'en gallium (nous n'envisageons pas le mercure, qui n'est pas aussi bon conducteur et surtout 13 fois plus lourd que le sodium).

2. pouvoir atteindre $\Delta T \gg \Delta T_c$ pour étudier la convection loin du seuil. Ceci n'est pas si évident, c'était d'ailleurs un de nos soucis pour cette étude. On peut avoir une bonne idée du seuil sans champ (cf le chapitre 1.1.2, partie II). En présence de champ c'est plus complexe (voir le chapitre 2, partie III). Toujours est-il qu'en présence de gravité centrifuge on a intérêt à tourner le plus vite possible (par la même occasion cela rend la gravité terrestre relativement plus faible, ce qui n'est pas pour nous déplaire) et à utiliser une grande taille.

Il serait important, dans le cadre d'une expérience de magnéto-convection, d'être capable de déceler le champ magnétique induit par les tourbillons. Nous n'avons pas pu atteindre ici un tel degré de précision. Cependant en présence d'un forçage et un champ magnétique légèrement plus grands cela devrait être possible. Par exemple dans notre configuration, des vitesses deux fois plus grandes et un champ imposé lui aussi deux fois plus intense nous permettrait d'atteindre un champ induit de l'ordre de 200 nT si l'on en croit l'estimation (3.2)_{III}. Des vitesses deux fois plus intenses sont accessibles - d'après nos lois d'échelles - en réduisant environ d'un facteur 4 le seuil de convection, ce qui est possible en tournant plus vite ou dans une plus grosse sphère. Un champ magnétique deux fois plus intense n'est sans doute pas hors de portée. On pourrait par exemple faire passer les courants dans l'arbre de l'expérience (avec une âme en cuivre; il faut pour cela un arbre suffisamment gros puis que l'on peut faire passer dans une section environ $5A/mm^2$).

Observer le champ induit nous avancerait pour savoir quel sont les liens entre l'échelle du champ induit et celle de l'écoulement (NB: cela suppose d'être capable de détecter la taille des cellules convectives). Dans la même logique il serait intéressant d'obtenir des jets multiples. Nous avons vu qu'il semble possible d'en observer aussi à faible Prandtl (le cas des métaux liquides) en tournant plus vite. Ces jets seraient-ils tués en présence d'un champ magnétique?

Que peut-on espérer raisonnablement atteindre comme paramètres physiques? Comme exemple basons nous sur la sphère utilisée par Woody Shew pour sa thèse à College Park (Shew et al. [2002]): 60 cm de diamètre et un rapport d'aspect $r_i/r_e = 1/3$. En tournant à 2000 tpm on atteint des nombres d'Ekman de l'ordre de $7 \cdot 10^{-8}$ en sodium ($P = 0.01$), ce qui correspond à une différence de température critique $\Delta T_c \sim 1 \text{ K}$ (d'après nos calculs QG). Sont alors accessibles des paramètres p de l'ordre de la centaine, ce qui correspond à un nombre de Peclet local de 100 environ. Compte tenu des caractéristiques du sodium, cela fabriquerait des nombres de Reynolds magnétique locaux de 10^{-1} .

ANNEXE

Annexe A

Méthode SOR de calcul du potentiel (Successive Over-Relaxation)

Formulation du problème

Nous rappelons ici l'équation à inverser pour obtenir le potentiel V aux parois de la sphère:

$$\Delta V = -B_0 z \frac{\partial}{\partial s} (\eta u_s) \quad (\text{A.1})$$

Pour chaque mode m , on utilise une méthode SOR (Successive Over-Relaxation Method), appliquée au potentiel V décrit sur une grille sphérique (r, θ, ϕ) . En différences finies, le problème (A.1) peut être décrit ainsi:

$$a_{ij}V_{i+1j} + b_{ij}V_{i-1j} + c_{ij}V_{ij+1} + d_{ij}V_{ij-1} + e_{ij}V_{ij} = f_{ij}$$

On peut ainsi exprimer la valeur de V_{ij} en fonction de ses voisins immédiats:

$$V_{ij} = \frac{1}{e_{ij}} [f_{ij} - (a_{ij}V_{i+1j} + b_{ij}V_{i-1j} + c_{ij}V_{ij+1} + d_{ij}V_{ij-1})]$$

La méthode SOR consiste, à chaque itération n , à calculer une solution temporaire U^* telle que:

$$U_{ij}^* = \frac{1}{e_{ij}} [f_{ij} - (a_{ij}V_{i+1j}^n + b_{ij}V_{i-1j}^n + c_{ij}V_{ij+1}^n + d_{ij}V_{ij-1}^n)]$$

Le calcul du potentiel au pas de temps $n + 1$ fait alors intervenir le paramètre d'over-relaxation ω ainsi (les indices ij sont sous-entendus):

$$U^{n+1} = \omega.U^* + (1 - \omega).U^n$$

ou alors, à l'aide du résidu $\zeta = e.(U^n - U^*)$

$$U^{n+1} = U^n - \frac{\omega}{e}.\zeta$$

"Numerical Recipes" décrit cette méthode comme plus rapide qu'une relaxation simple, propose des critères de stabilité en fonction de ω (en particulier ω compris entre 1 et 2) et l'optimise pour une grille régulière. Ce n'est pas notre cas, car c'est proche de la sphère que le potentiel devient important (là où les courants bouclent), et c'est donc là que nous affinons la grille 3D. Il faut alors trouver un bon compromis pour que la convergence soit stable et pas trop lente, en jouant sur les différents paramètres (ω , nombre de points et irrégularité de la grille).

Description de la grille 3D

Nous utilisons une grille sphérique (r, θ, ϕ) , θ étant la colatitute, avec une décomposition en mode de Fourier dans la direction azimutale (identique à celle de la grille cylindrique utilisée dans le code de convection!). Les grilles en rayon et colatitute sont irrégulières, reserrées là où l'on cherche plus de finesse, i.e. près de la sphère (pour r) et près du manchon (pour θ). La grille en rayon (resp. colatitute) comporte N_{r_V} (resp. NTV) points; le pas de grille évolue comme une fonction *atan* dont on choisi la pente à l'origine avec Pr_V (resp. PTV). Ces grilles sont normalisées de telle sorte que:

$$\begin{cases} r_V(0) = ri ; r_V(N_{r_V}) = re \\ \theta(0) = asin(ri/re) ; \theta(NTV) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Pour chaque colatitute d'indice it de la grille 3D, le manchon est repéré par le point d'indice $(ir_l(it), it)$. A chaque relaxation, pour évaluer la matrice f , on a besoin en tout point de cette grille de la vitesse équatoriale de la grille 2D r_{2D} . Ainsi pour chaque point du maillage sphérique (ir, it) :

- $r_h(ir, it)$ est le rayon 3D projeté sur l'équateur;
- $B_0(ir, it)$ est la valeur du champ imposé en ce point;
- $Ir_h(ir, it)$ est le l'indice correspondant au rayon 2D juste supérieur a ce rayon projeté;
- $x_h(ir, it)$ est le coefficient à utiliser pour interpoler linéairement la vitesse 2D entre $r_{2D}(Ir_h)$ et $r_{2D}(Ir_h - 1)$.

Nous avons aussi besoin, pour calculer le terme issu de la force de Lorentz dans le programme principal, du potentiel $V_{|sphère}$ à la verticale de chaque point ir du maillage 2D. Alors:

- $t_s(ir)$ est la colatitute à la verticale de ce point sur la sphère;
- $It_s(ir)$ est le l'indice correspondant a la colatitute 3D juste supérieure a celle-ci;
- $x_s(ir)$ est le coefficient a utiliser pour interpoler lineairement le potentiel entre $\theta(It_s)$ et $\theta(It_s - 1)$.

En chaque point (ir, it) de la grille 3D, on calcule les matrices suivantes:

- $Gr_V = \frac{d}{dr_V}$ code pour la composante radiale du gradient 3D;
- $L_V = \frac{d^2}{dr_V^2} + \frac{2}{dr_V} \frac{d}{dr_V}$ code pour la partie radiale du Laplacien 3D;
- $Gt = \frac{1}{r_V} \frac{d}{d\theta}$ code pour la composante du gradient 3D suivant la colatitude θ ;
- $Lt = \frac{1}{r_V^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d}{d\theta} \right) + \tan(\theta) \frac{Gt}{r_V}$ code pour la composante du Laplacien 3D suivant la colatitude θ .

Expression matricielle

Les matrices $a...e$ sont indépendantes de la fonction potentiel ψ décrivant la vitesse \mathbf{u}_e . Seule la matrice f , qui fait intervenir ψ , doit être réactualisée à chaque relaxation. Le problème (A.1), à l'aide des notation précédentes, s'écrit alors (B_0, z, x_h, r_h et ir_h sont des fonctions de (ir, it)):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} La_V(ir)V(m, ir-1, it) \\ Lb_V(ir)V(m, ir, it) \\ Lc_V(ir)V(m, ir+1, it) \end{bmatrix} - \left[\frac{m}{r(ir)\sin(\theta(it))} \right]^2 V(m, ir, it) + \begin{bmatrix} Lta(ir, it)V(m, ir, it-1) \\ Ltb(ir, it)V(m, ir, it) \\ Ltc(ir, it)V(m, ir, it+1) \end{bmatrix} \\ &= \frac{im}{r_h} B_0 z [x_h \Phi(ir_h - 1) + (1 - x_h) \Phi(ir_h)] \end{aligned} \quad (A.2)$$

avec

$$\Phi(ir) = \begin{bmatrix} \eta(ir)Gra(ir)\psi(m, ir-1) \\ \left[\eta(ir)Grb(ir) + \frac{d\eta(ir)}{dr} - \frac{\eta(ir)}{r(ir)} \right] \psi(m, ir) \\ \eta(ir)Grc(ir)\psi(m, ir+1) \end{bmatrix}$$

NB: si la partie gauche de l'équation (A.2) est exprimée en coordonnées sphériques, la partie droite est exprimée en coordonnées cylindriques. Ce n'est pas une erreur ! En effet cette dernière provient du terme $\mathbf{B}_0 \cdot \nabla_{\times} \mathbf{u}$; or \mathbf{B}_0 est selon \mathbf{e}_{ϕ} et cette direction est commune aux deux référentiels.

Dans le coeur du domaine

Dans le coeur du domaine, (A.2) amène à:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(ir, :) = Lc_V(ir) \\ b(ir, :) = La_V(ir) \\ c(ir, it) = Ltc(ir, it) \\ d(ir, it) = Lta(ir, it) \\ e(m, ir, it) = Lb_V(ir) - \left[\frac{m}{(r_V(ir) \sin(\theta(it)))} \right]^2 + Ltb(ir, it) \\ f(:, ir, it) = fa(:, ir, it) \psi(:, ir_h - 2) + fb(:, ir, it) \psi(:, ir_h - 1) + \\ \quad fc(:, ir, it) \psi(:, ir_h) + fd(:, ir, it) \psi(:, ir_h + 1) \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} fa(ir, it) = \frac{im}{r_h} z B_0 x_h [\eta Gra]_{|ir_h-1} \\ fb(ir, it) = \frac{im}{r_h} z B_0 \left\{ x_h \left[\eta Grb + \frac{d\eta}{ds} - \frac{\eta}{s} \right]_{|ir_h-1} + (1 - x_h) [\eta Gra]_{|ir_h} \right\} \\ fc(ir, it) = \frac{im}{r_h} z B_0 \left\{ x_h [\eta Grc]_{|ir_h-1} + (1 - x_h) \left[\eta Grb + \frac{d\eta}{ds} - \frac{\eta}{s} \right]_{|ir_h} \right\} \\ fd(ir, it) = \frac{im}{r_h} z B_0 (1 - x_h) [\eta Grc]_{|ir_h} \end{array} \right.$$

Aux frontières:

Aux frontières, la condition de non-pénétration du courant électrique (1.2) doit être respectée.

sur la sphère ($ir = N_{r_V}$):

Dans le référentiel sphérique (r, θ, ϕ) , les équations (1.2)_I et (1.5)_I appliquées sur la sphère amènent à:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_r &= 0. \\ i.e. \frac{\partial V}{\partial r} &= B_0 \cdot u_\theta^{3D} \\ i.e. \frac{\partial V}{\partial r} &= B_0 \left[-\frac{dL}{ds} \sin(\theta) + \cos(\theta) \right] u_s^{2D} \end{aligned}$$

Ce que l'on discrétise ainsi:

$$\frac{V(:, N_{r_V}, it) - V(:, N_{r_V} - 1, it)}{dr_V(N_{r_V})} = -\frac{im B_0}{ir_h} [-dH(ir_h) \sin(\theta(it)) + \cos(\theta(it))] \psi(:, ir_h)$$

Après interpolation linéaire, on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(N_{r_V}, :) = c(N_{r_V}, :) = d(N_{r_V}, :) = 0 \\ b(N_{r_V}, :) = \frac{-1}{dr_V(N_{r_V})} \\ e(:, N_{r_V}, :) = \frac{1}{dr_V(N_{r_V})} \\ fa(:, N_{r_V}, :) = fd(:, N_{r_V}, :) = 0 \\ fb(m, N_{r_V}, it) = -\frac{imB_0}{r_h} x_h \left[-dH_{|ir_h-1} \sin(\theta(it)) + \cos(\theta(it)) \right] \\ fc(m, N_{r_V}, it) = -\frac{imB_0}{r_h} (1 - x_h) \left[-dH_{|ir_h} \sin(\theta(it)) + \cos(\theta(it)) \right] \end{array} \right.$$

sur le manchon ($ir = ir_l(it)$):

Dans le référentiel sphérique (r, θ, ϕ) , les équations (1.2) et (1.5) appliquées sur le manchon (ou $\mathbf{u} = \mathbf{0}$!) amènent à:

$$\begin{aligned} j_r \sin(\theta) + j_\theta \cos(\theta) &= 0 \\ i.e. \frac{\partial V}{\partial r} \sin(\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \cos(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

... une fois discrétisé, on arrive à:

$$\left\{ \begin{array}{l} b(ir_l(it), it) = d(ir_l(it), it) = 0 \\ a(ir_l(it), it) = \frac{\sin(\theta(it))}{dr_V(ir_l + 1)} \\ c(ir_l(it), it) = \frac{\cos(\theta(it))}{r_V(ir_l) dt_V(it)} \\ e(:, ir_l(it), it) = -\frac{\sin(\theta(it))}{dr_V(ir_l + 1)} - \frac{\cos(\theta(it))}{r_V(ir_l) dt_V(it)} \\ f(:, ir_l(it), it) = 0 \end{array} \right.$$

Le calcul de la force de Lorentz dans le code de convection nécessite une interpolation du potentiel - calculé à la surface de la sphère par la méthode SOR - à la verticale des points de maillage 2D... c'est l'interpolation linéaire dont on parle plus haut ($x_s, t_s, It_s...$). D'un pas de temps à l'autre, on repart de la solution du potentiel la plus récente pour commencer la relaxation. Pour gagner du temps, le potentiel n'est calculé qu'une fois tous les $dt_{mag} = 10$ pas de temps.

Bibliographie

- A. Abdulrahman, C.A. Jones, M.R.E Proctor, and K. Julien. Large wavenumber convection in the rotating annulus. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 93:227–252, 2000.
- M. Ardes, F. H. Busse, and J. Wicht. Thermal convection in rotating spherical shells. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 99:55–67, 1997.
- J. Aubert. *Modèles expérimentaux et numériques de convection dans le noyau de la Terre*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 2001.
- J. Aubert, D. Brito, H.C. Nataf, P. Cardin, and J.P. Masson. A systematic experimental study of rapidly rotating spherical convection in water and liquid gallium. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 128:51–74, 2001.
- J. Aubert, N. Gillet, and P. Cardin. Quasigeostrophic models of convection in rotating spherical shells. *G-Cubed*, 4(7):1052, 2003.
- J. Aubert, S. Jung, and H. Swinney. Observations of zonal flows created by potential vorticity mixing in a rotating fluid. *Geophys. Res. Lett.*, 9:1876–1879, 2002.
- J. Aubert and J. Wicht. Axial vs. equatorial dipolar dynamo models with implications for planetary magnetic fields. *Earth and Planetary Science Letters*, 221:409–419, 2004.
- J. Aurnou and M. Heimpel. Zonal jets in rotating convection with mixed mechanical boundary conditions. *Icarus*, 169:492–498, 2004.
- G. Backus and J.L. Le Mouél. The region on the core-mantle boundary where a geostrophic velocity field can be determined from frozen flux magnetic data. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 85:617–628, 1986.
- M. Bourgoin, L. Marié, F. Pétrelis, C. Gasquet, A. Guigon, J.-B. Luciani, M. Moulin, F. Namer, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, and J.-F. Pinton. Magnetohydrodynamics measurements in the von Karman sodium experiment. *Phys. Fluids*, 14:3046–3058, 2002.
- D. Brito. *Approches expérimentales et théoriques de la dynamique du noyau terrestre*. PhD thesis, Université de Paris VII, 1998.
- D. Brito, J. Aurnou, and P. Cardin. Turbulent viscosity measurements relevant to planetary core-mantle dynamics. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 141:3–8, 2004.
- D. Brito, P. Cardin, H.C. Nataf, and G. Marollet. Experimental study of a geostrophic vortex of gallium in a transverse magnetic field. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 91:77–98, 1995.

- D. Brito, P. Cardin, H.C. Nataf, and P. Olson. Experiments on Joule heating and the dissipation of energy in the Earth's core. *Geophys. J. Intl.*, 127:339–347, 1996.
- D. Brito, H.C. Nataf, P. Cardin, J. Aubert, and J.P. Masson. Ultrasonic Doppler velocimetry in liquid gallium. *Experiments in fluids*, 31:653–663, 2001.
- E. C. Bullard and H. Gellman. Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A 247:213–278, 1954.
- B.F. Burke and K.L. Franklin. Observations of a variable radio source associated with the planet Jupiter. *J. Geophys. Res. Mech.*, 60:213–217, 1955.
- F.H. Busse. Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.*, 44:441–460, 1970.
- F.H. Busse and C.R. Carrigan. Convection induced by centrifugal buoyancy. *J. Fluid Mech.*, 62:579–592, 1976.
- F.H. Busse and A. C. Or. Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 1. Thermal Rossby waves. *J. Fluid Mech.*, 166:173–187, 1986.
- F.H. Busse and R. Simitev. Inertial convection in rotating fluid spheres. *J. Fluid Mech.*, 498:23–30, 2004.
- P. Cardin and P. Olson. An experimental approach to thermochemical convection in the Earth's core. *Geophys. Res. Lett.*, 19:1995–1998, 1992.
- P. Cardin and P. Olson. The influence of toroidal magnetic field on thermal convection in the core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 82:235–239, 1994.
- P. Cardin and P. Olson. Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell: consequences for flow in the outer core. *Earth and Planetary Science Letters*, 132:167–181, 1995.
- C. R. Carrigan and F. H. Busse. An experimental and theoretical investigation of the onset of convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.*, 126:287–305, 1983.
- S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon, Oxford, 1961.
- U. R. Christensen. Zonal flow driven by strongly supercritical convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.*, 470:115–133, 2002.
- U. R. Christensen, P. Olson, and G.A. Glatzmaier. Numerical modelling of the geodynamo: a systematic parameter study. *G. Jeophys. Int.*, 138:393–409, 1999.
- S. Cordero and F. H. Busse. Experiments on convection in rotating hemispherical shells: transition to a quasi-periodic state. *Geophys. Res. Lett.*, 19:733–736, 1992.
- V. Courtillot and J. Besse. Magnetic field reversals polar wander and core mantle coupling. *Science*, 237:1140, 1987.
- E. Dormy. *Modélisation numérique de la dynamo terrestre*. PhD thesis, Institut de Physique du Globe de Paris, 1997.
- E. Dormy, A. M. Soward, C. A. Jones, D. Jault, and P. Cardin. The onset of thermal convection in rotating spherical shells. *J. Fluid Mech.*, 501:43–70, 2004.
- A. Dziewonski and D. Anderson. Preliminary reference Earth model PREM. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 25:297–356, 1981.

- W. M. Elsasser. Induction effects in terrestrial magnetism. *Phys. Rev.*, 69:106–116, 1946.
- D. R. Fearn. Thermally driven hydromagnetic convection in a rapidly rotating sphere. *Proc. R. Soc. Lond., A* 369:227–242, 1979.
- D. R. Fearn, M.R.E. Proctor, and C.C. Sellar. Nonlinear magnetoconvection in a rapidly rotating sphere and Taylor’s constraint. *Gephys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 77:111–132, 1994.
- A. Gailitis, O. Lielausis, S. Dementév, A. Cifersons, G. Gerberth, Th. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, and G. Will. Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility. *Phys. Rev. Lett.*, 84:4365–68, 2000.
- C. Gessmann and B. Wood. Potassium in the Earth’s core? *Earth and Planetary Science Letters*, V. 200:63–78, 2002.
- G.A. Glatzmaier, R.S. Coe, L. Hongre, and P.H. Roberts. The role of the Earth’s mantle in controlling the frequency of geomagnetic reversals. *Nature*, 401:885–890, 1999.
- G.A. Glatzmaier and P.H. Roberts. A three dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic reversal. *Nature*, 377:203–208, 1995.
- G. Godrèche and P. Manneville. *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- D. Gubbins, D. Alfè, G. Masters, G.D. Price, and M. Gillan. Gross thermodynamics of two-component core convection. *Geophys. J. Int*, 157:1407–1414, 2004.
- D. Gubbins and P. H. Roberts. *Magnetohydrodynamics of the Earth’s core*. J. A. Jacobs, in *Geomagnetism*, Vol. 2, 1987.
- J. Herrmann and F. H. Busse. Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 4. Modulations and transition to chaos at low Prandtl numbers. *J. Fluid. Mech.*, 350:209–229, 1997.
- G. Hulot, C. Eymin, B. Langlais, M. Mandeau, and N. Olsen. Small-scale structure of the geodynamo inferred from Oersted and Magsat satellite data. *Nature*, 416:620–623, 2002.
- G. Hulot, J.L. Le Mouél, and D. Jault. The flow at the core-mantle boundary: symmetry properties. *J. Geomag. Geoelectr.*, 42:857–874, 1990.
- A.P. Ingersoll and D. Pollard. Motions in the interiors and atmospheres of Jupiter and Saturn: scale analysis, anelastic equations, barotropic stability criterion. *Icarus*, 52:62–80, 1982.
- A. Jackson. Time dependency of geostrophic core surface motions. *Phys. Earth Planet. Int.*, 103:293–311, 1997.
- A. Jackson. Intense equatorial flux spots on the surface of the Earth’s core. *Nature*, 424:760–763, 2003.
- J.A. Jacobs. *The Earth’s core*. Academic Press, 1987.
- M. Jaletzky. *Experimental study of rotating cylindrical annulus convection*. PhD thesis, University of Bayreuth, 1999.
- D. Jault, C. Gire, and J.L. Le Mouél. Westward drift, core motions and exchanges of angular momentum between core and mantle. *Nature*, 333:353 – 356, 1988.

- C. A. Jones. *Dynamos in planets*. (eds M.J Thompson and J.C. Christensen-Dalsgaard) Cambridge University Press, 2003.
- C. A. Jones, J. Rotvig, and A. Abdulrahman. Multiple jets and zonal flows on Jupiter. *Geophys. Res. Lett.*, 30(14):1731, doi:10.1029/2003GL016980, 2003.
- C. A. Jones, A. M. Soward, and A. I. Mussa. The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere. *J. Fluid Mech.*, 405:157–179, 2000.
- A.R.T Jonkers, A. Jackson, and A. Murray. Four centuries of geomagnetic data from historical records. *Rev. Geophys.*, 41:1006 doi:10.1029/2002RG000115, 2003.
- M. G. Kivelson, K. K. Khurana, C. T. Russel, S. P. Joy, M. Volwerk, R. J. Walker, C. Zimmer, and J. A. Linker. Magnetized or unmagnetized: Ambiguity persists, following Galileo’s encounters with Io in 1999. and 2000. *J Geophys. Res-Space Sci.*, 106:26121–26135, 2001.
- R. H. Kraichnan. Inertial ranges in two-dimensionnal turbulence. *Phys. Fluids*, 10:195–211, 1967.
- S. Labrosse, J.P. Poirier, and J.L. Le Mouél. On cooling of the Earth’s core. *Phys. Earth Planet Int.*, 99:1–17, 1997.
- B. Lehnert. An experiment on axisymmetric flow of liquid sodium in a magnetic field. *Ark. Fys.*, 13:109–116, 1958.
- S. Lorenzani and A. Tilgner. Inertial instabilities of fluid flow in precessing spheroidal shells. *J. Fluid Mech.*, 492:363–379, 2003.
- J.B. Manneville and P. Olson. Banded convection in rotating fluid spheres and the circulation of the Jovian atmosphere. *Icarus*, 122:242–250, 1996.
- P. Manneville. *Structures dissipatives, chaos et turbulence*. Aléa, Saclay, 1990.
- L. Marié, F. Pétrélis, M. Bourgoin, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. fauve, P. Odier, and J.-F. Pinton. Open questions about homogeneous fluid dynamos: The VKS experiment. *Magnetohydrodynamics*, 38:156–169, 2002.
- U. Müller and R. Stieglitz. Can the Earth’s magnetic field be simulated in the laboratory? *Naturwissenschaften.*, 87:381–390, 2000.
- V. Morin and E. Dormy. Time dependant β -convection in rapidly rotating spherical shell. *Phys. Fluids*, 16:1603–1609, 2004.
- V. Rama Murthy, W. Van Westrenen, and Y. Fei. Experimental evidence that potassium is a substantial radioactive heat source in planetary cores. *Nature*, 423:163–165, 2003.
- J. Noir, P. Cardin, D. Jault, and J-P. Masson. Experimental evidence of nonlinear resonance effects between retrograde precession and the tilt-over mode within a spheroid. *Geophys. J. Int.*, 154:407–416, 2003.
- K. Okada and K. Ozoe. Transient responses of natural convection heat transfer with liquid gallium under an external magnetic field in either the x,y or z direction. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 31:700–706, 1992.
- P. Olson and G. Glatzmaier. Magnetoconvection in a rotating spherical shell: structure of flow in the outer core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 92:109–118, 1995.

- P. Olson and G. Glatzmaier. Magnetoconvection and thermal coupling of the Earth's core and mantle. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 354:1413–1424, 1996.
- A. C. Or and F.H. Busse. Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 2. Transitions to asymmetric and vacillating flow. *J. Fluid Mech.*, 174:313–326, 1987.
- J. Pedloski. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer, New-York, 1987.
- N. Peffley, A. Goumievski, A. Cawthorne, and D. Lathrop. Characterization of experimental dynamos. *Geophys. J. Int.*, 142:52–58, 2000.
- M. Petry, F.H. Busse, and F. Finocchi. Convection in a rotating cylindrical annulus in the presence of a magnetic field. *Eur. J. Mech., B/Fluids*, 16(6):817–833, 1997.
- E. Plaut and F.H. Busse. Low Prandtl number convection in a rotating cylindrical annulus. *J. Fluid Mech.*, 464:345–363, 2002.
- E. Plaut and F.H. Busse. Multicellular convection in rotating annuli. *soumis à J. Fluid Mech.*, 2004.
- J.P. Poirier. *Les profondeurs de la Terre*. Masson, 1991.
- P.B. Rhines. Wave and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.*, 122:417–443, 1975.
- P. H. Roberts. On the thermal instability of a rotating fluid sphere containing heat sources. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A263:93–117, 1968.
- P.H. Roberts, C.A. Jones, and A. Calderwood. *Energy fluxes and ohmic dissipation, in "Earth's core and lower mantle"*. (eds C.A. Jones, A.M. Soward and K. Zhang) Taylor and Francis, 2003.
- J.L. Sabot and H. Lauvray. Gallium and gallium compounds. *Kirk-Othmer, Encyclopedia of Chemical technology*, 12:299–317, 1995.
- A. Sakuraba. Linear magnetoconvection in rotating fluid spheres permeated by uniform axial magnetic field. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 96:291–318, 2002.
- A. Sakuraba and M. Kono. Effect of a uniform magnetic field on nonlinear magnetoconvection in a rotating fluid spherical shell. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 92:255–287, 2000.
- G. Sarson, C. A. Jones, K. Zhang, and G. Schubert. Magnetoconvection dynamos and the magnetic fields of Io and Ganymede. *Science*, 27:1106–1108, 1997.
- N. Schaeffer and P. Cardin. Quasi-geostrophic kinematic dynamos. *in progress*, 2004a.
- N. Schaeffer and P. Cardin. Quasi-geostrophic model of the instabilities of the Stewartson layer. *soumis à J. Fluid Mech.*, 2004b.
- M. Schnaubelt and F. H. Busse. Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 3. Vacillating and spatially modulated flows. *J. Fluid Mech.*, 245:155–173, 1992.
- G. Schubert, K. Zhang, M.G. Kivelson, and J.D. Anderson. The magnetic field and internal structure of Ganymede. *Nature*, 384:264–266, 1997.
- W.L. Shew, D.R. Sisan, and D. Lathrop. Mechanically forced and thermally driven flows in liquid sodium. *Magnetohydrodynamics*, 38:121–127, 2002.
- A.M. Soward. On the finite amplitude instability of a rotating fluid sphere. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 9:19–74, 1977.

- A.M. Soward. Convection driven dynamos. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 20:134–151, 1979.
- F. D. Stacey. *Physics of the Earth*. Brookfield Press, 1992.
- S. Stanley and J. Bloxham. Convective region geometry as the cause of Uranus’ and Neptune’s unusual magnetic fields. *Nature*, 428:151–153, 2004.
- S.V. Starchenko and C.A. Jones. Typical velocities and magnetic field strengths in planetary interiors. *Icarus*, 157:426–435, 2002.
- I. Sumita and P. Olson. Laboratory experiments on high Rayleigh number thermal convection in a rapidly rotating hemispherical shell. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 117:153–170, 2000.
- I. Sumita and P. Olson. Experiments on highly supercritical thermal convection in a rapidly rotating hemispherical shell. *J. Fluid Mech.*, 492:271–287, 2003.
- A. Tokuhiro and Y. Takeda. Measurement of flow phenomena using the ultrasonic velocity profile method in a simulated Czochralski crystal puller. *Journal of Crystal Growth*, 130:421–432, 1993.
- D. J. Tritton. *Physical fluid dynamics*. Oxford Science, 1988.
- J.P. Valet and L. Meynadier. Geomagnetic field intensity and reversals during the past four million years. *Nature*, 336:234–238, 1993.
- J-I. Yano. Asymptotic theory of thermal convection in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.*, 236:535–556, 1992.
- J.I. Yano, O. Talagrand, and P. Drossart. Outer planets: Origins of atmospheric zonal winds. *Nature*, 421:36, 2003.
- K. Zhang. On equatorially trapped boundary inertial waves. *J. Fluid Mech.*, 248:203–217, 1993.
- K. Zhang and F. H. Busse. On the onset of convection in rotating spherical shells. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 39:119–147, 1987.
- K. Zhang and D. Gubbins. Scale disparities and magnetohydrodynamics in the Earth’s core. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 358:899–920, 2000.
- K. Zhang and C. A. Jones. The influence of Ekman boundary layers on rotating convection. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 71:145–162, 1992.
- K. Zhang and G. Schubert. Magnetohydrodynamics in rapidly rotating spherical systems. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32:409–443, 2000.
- K. Zhang, M. Weels, and P. Roberts. Effect of electrically conducting walls on rotating magnetoconvection. *Phys. Fluids*, 16:2023–2032, 2004.